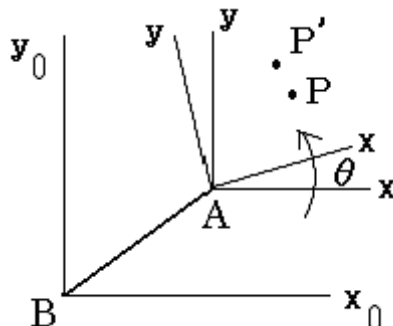


同次変換行列

2 D (1)



点 P (x, y) は手に持たれている (手先座標 x - y であらわされる)。 最初、静止 x 座標の原点 B にあった手先が点 A (a0x , a0y) に移動し、次に角度 だけ姿勢を変えたときに、P は P ' になるが、その静止座標での位置は？

逆に考える。 最後の回転で P は A にたいし $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ で

さらに、平行移動により P は $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{0x} \\ 0 & 1 & a_{0y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

る。

サンプルプログラムをしめす。

! !trans01.bas 06-2-4

dim T(3,3),R(3,3),x0(3),x(3),Tx(3)

let x(1)=3 !x=3
let x(2)=4 !y=4
let x(3)=1
let a0x=2 !A 点 x 座標
let a0y=1 !A 点 y 座標
let t1=1/6*pi !回転角度 = /6

let T(1,1)=1
let T(1,3)=a0x
let T(2,2)=1
let T(2,3)=a0y
let T(3,3)=1

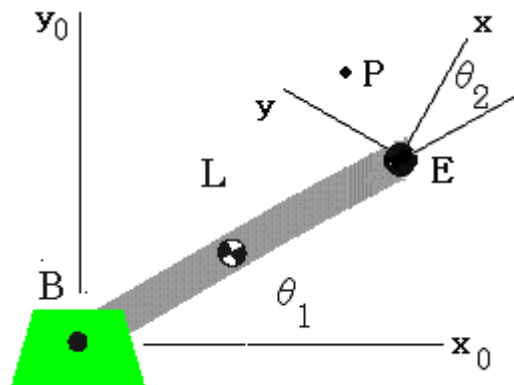
let R(1,1)=cos(t1)
let R(1,2)=-sin(t1)
let R(2,1)=sin(t1)
let R(2,2)=cos(t1)
let R(3,3)=1

mat Rx=R*x
mat x0=T*Rx

print "x0=";x0(1) !静止座標の x0 座標値
print "y0=";x0(2) !静止座標の y0 座標値

END

2 D (2)



点 $P(x, y)$ はアーム L の手 E に持たれている(手先座標 $x - y$ であらわされる)。最初、水平にあったアームが角度 θ_1 回転し、次に手先が角度 θ_2 だけ姿勢を変えたときに、 P の静止座標での位置は？

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

サンプルプログラムをしめす。

! !trans02.bas 06-2-4

dim T(3,3),R1(3,3),R2(3,3),x0(3),x(3),Rx(3)
dim R2x(3),TR2x(3)

let x(1)=3 !x=3
let x(2)=4 !y=4
let x(3)=1
let L=2 !アーム長さ
let t1=pi/18 !回転角度 1 = /18
let t2=pi/6 !回転角度 2 = /6

let R1(1,1)=cos(t1)
let R1(1,2)=-sin(t1)
let R1(2,1)=sin(t1)
let R1(2,2)=cos(t1)
let R1(3,3)=1

let T(1,1)=1
let T(1,3)=L
let T(2,2)=1
let T(3,3)=1

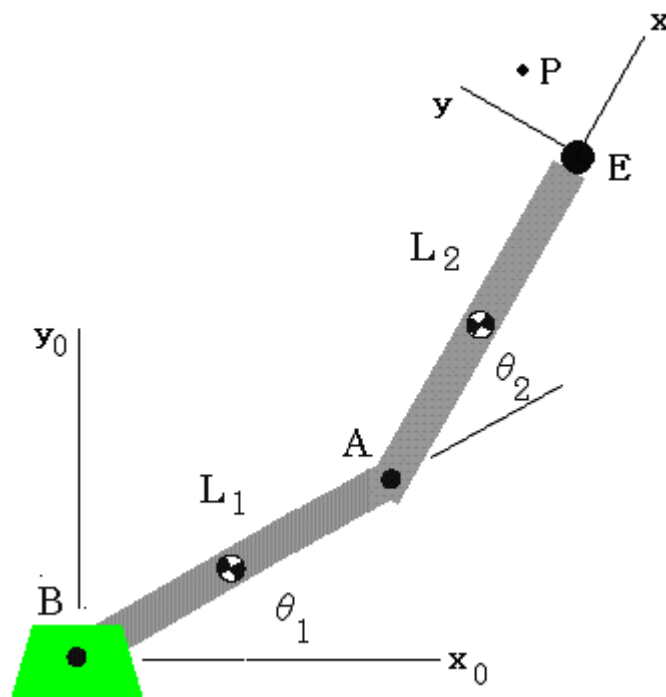
let R2(1,1)=cos(t2)
let R2(1,2)=-sin(t2)
let R2(2,1)=sin(t2)
let R2(2,2)=cos(t2)
let R2(3,3)=1

mat R2x=R2*x
mat TR2x=T*R2x
mat x0=R1*TR2x

print "x0=";x0(1) !静止座標の x0 座標値
print "y0=";x0(2) !静止座標の y0 座標値

END

2 D (3)



点 $P(x, y)$ は原点から長さアーム $L_1 +$ アーム L_2 の手 E に持たれている（手先座標 $x - y$ であらわされる）。最初、水平にあったアーム L_1 が原点 B まわりに角度 θ_1 回転し、アーム L_2 が角度 θ_2 だけ回転したときに、 P の静止座標での位置は？

まずアーム L_1 の同次変換行列 ${}^B T_A = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 1 個にま

とめると ${}^B T_A = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & L_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & L_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

どうように、アーム L_2 は A にたいし ${}^A T_E = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & L_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & L_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とな

る。

したがって、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^B T_A {}^A T_E \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & L_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & L_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & L_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここに、 $\begin{pmatrix} C_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} C_2 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}$ である。

サンプルプログラムをしめす。

```
! !trans03.bas 06-2-5
```

```
dim Tba(3,3),Tae(3,3),X0(3),X(3),TaeX(3)
```

```
let X(1)=3          !x=3
let X(2)=4          !y=4
let X(3)=1
let L1=0.8          !アーム L1 長さ 0.8
let L2=0.8          !アーム L2 長さ 0.8
let t1=pi/18        !回転角度 1 = /18
let t2=pi/6         !回転角度 2 = /6
```

```
let Tba(1,1)=cos(t1)
let Tba(1,2)=-sin(t1)
let Tba(1,3)=L1*cos(t1)
let Tba(2,1)=sin(t1)
let Tba(2,2)=cos(t1)
let Tba(2,3)=L1*sin(t1)
let Tba(3,3)=1
```

```
let Tae(1,1)=cos(t2)
let Tae(1,2)=-sin(t2)
let Tae(1,3)=L2*cos(t2)
let Tae(2,1)=sin(t2)
let Tae(2,2)=cos(t2)
let Tae(2,3)=L2*sin(t2)
let Tae(3,3)=1
```

```
mat TaeX=Tae*X
mat X0=Tba*TaeX
```

```
print "x0=";X0(1) !静止座標の x0 座標値
print "y0=";X0(2) !静止座標の y0 座標値
```

```
END
```

静止座標でのベクトル \vec{P} に手先の座標の原点があり、かつ手先がオイラー角 (zyz 型) で姿勢を変えたものとする。

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\pi/6 \\ \pi/2 \\ \pi/3 \end{pmatrix}$$

同時変換行列をもとめよ。

回転行列 R

$$\begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 \\ s1 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c2 & 0 & s2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s2 & 0 & c2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 \\ s3 & c3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} c1 \cdot c2 \cdot c3 - s1 \cdot s3 & -c1 \cdot c2 \cdot s3 - s1 \cdot c3 & c1 \cdot s2 \\ s1 \cdot c2 \cdot c3 + c1 \cdot s3 & -s1 \cdot c2 \cdot s3 + c1 \cdot c3 & s1 \cdot s2 \\ -s2 \cdot c3 & s2 \cdot s3 & c2 \end{bmatrix}$$

を利用する。

```
leuler04.bas
!同次変換行列 Local U ==> Global X
dim R(3,3),T(4,4),iT(4,4),X(4,1),U(4,1)
let t1=5/6*pi
let t2=pi/2
let t3=pi/3
let p1=2
let p2=3
let p3=4
let c1=cos(t1)
let c2=cos(t2)
let c3=cos(t3)
let s1=sin(t1)
let s2=sin(t2)
let s3=sin(t3)
let R(1,1)=c1*c2*c3-s1*s3
let R(1,2)=-c1*c2*s3-s1*c3
let R(1,3)=c1*s2
let R(2,1)=s1*c2*c3+c1*s3
let R(2,2)=-s1*c2*s3+c1*c3
let R(2,3)=s1*s2
let R(3,1)=-s2*c3
let R(3,2)=s2*s3
let R(3,3)=c2
for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    let T(i,j)=R(i,j)
  next j
next i
let T(1,4)=p1
let T(2,4)=p2
let T(3,4)=p3
let T(4,4)=1
mat print T
END
```

打ち出し結果

```
-----
-.433  -.25  -.866  2
-.75  -.433  .5  3
-.5  .866  0  4
0  0  0  1
-----
```

静止座標でのベクトル \vec{P} に手先の座標の原点があり、かつ手先がオイラー角 (zyz 型) で姿勢を変えたものとする。手先の座標系での位置の静止座標上の位置を求めよ。

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\pi/6 \\ \pi/2 \\ \pi/3 \end{pmatrix} \quad \text{手先の座標系での位置} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```

!euler05.bas
!同次変換行列 Local U ==> Global X for i=1 to 4
dim R(3,3),T(4,4),iT(4,4),X(4,1),U(4,1) for j=1 to 4
                                         let T(i,j)=round(T(i,j)*1000)/1000
                                         next j
let t1=5/6*pi                               next i
let t2=pi/2
let t3=pi/3
                                         mat print T

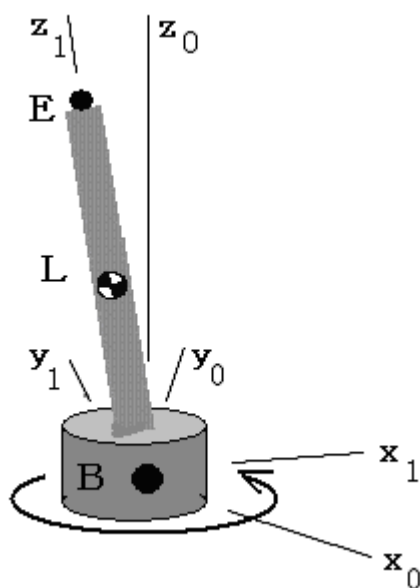
let p1=2
let p2=3
let p3=4
                                         !-----計算
                                         data 1,1,3,1
                                         mat read U

let c1=cos(t1)
let c2=cos(t2)
let c3=cos(t3)
let s1=sin(t1)
let s2=sin(t2)
let s3=sin(t3)
                                         !-----検算
                                         mat iT=inv(T)
                                         mat U=iT*X

let R(1,1)=c1*c2*c3-s1*s3
let R(1,2)=-c1*c2*s3-s1*c3
let R(1,3)=c1*s2
let R(2,1)=s1*c2*c3+c1*s3
let R(2,2)=-s1*c2*s3+c1*c3
let R(2,3)=s1*s2
let R(3,1)=-s2*c3
let R(3,2)=s2*s3
let R(3,3)=c2
                                         mat print U

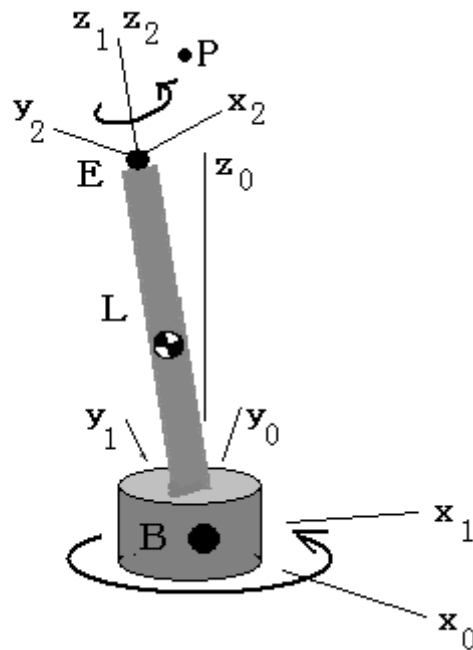
for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    let T(i,j)=R(i,j)
  next j
next i
let T(1,4)=p1
let T(2,4)=p2
let T(3,4)=p3
let T(4,4)=1
END

```



ベースが z_0 軸まわりに 回転し、当たらしい y_1 軸まわりに 傾く (z_0 軸が z_1 軸になる) とき、長さ L のアームの先端 E の座標をもとめよ。

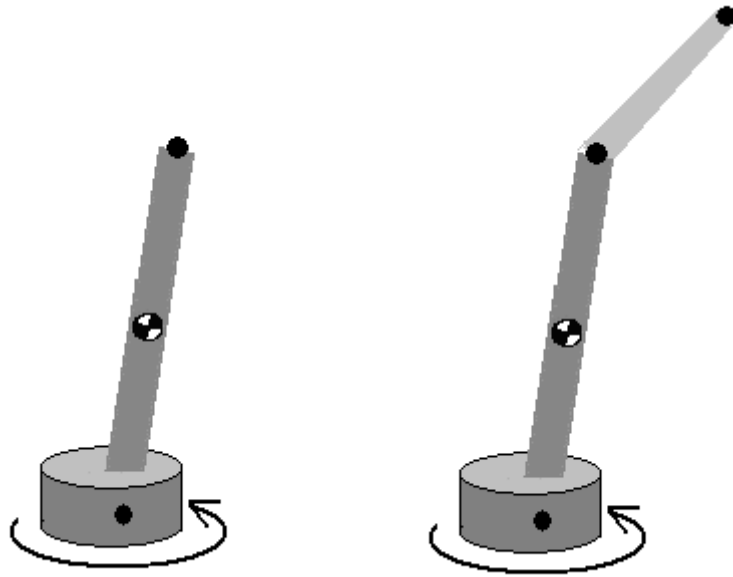
$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C2 & 0 & S2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C2 & 0 & S2 & LS2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 & LC2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C1C2 & -S1 & C1S2 & LC1S2 \\ S1C2 & C1 & S1S2 & LS1S2 \\ -S2 & 0 & C2 & LC2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LC1S2 \\ LS1S2 \\ LC2 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



ベースが z_0 軸まわりに 回転し、当たらしい y_1 軸まわりに 傾く (z_0 軸が z_1 軸になる)。長さ L のアームの先端 E の手先座標系がさらに z_1 軸まわりに 回転する。手先の座標系は E を原点として、 (x_2, y_2, z_2) となるが、 $P(x_2, y_2, z_2)$ の静止座標系からみた場合の位置をもとめよ。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & L \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & L \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C2 & 0 & S2 & LS2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 & LC2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C3 & -S3 & 0 & 0 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C1C2 & -S1 & C1S2 & LC1S2 \\ S1C2 & C1 & S1S2 & LS1S2 \\ -S2 & 0 & C2 & LC2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C3 & -S3 & 0 & 0 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

具体的な数字にたいする計算は 10 進 BASIC でやろう。



左図の場合

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C2 & 0 & S2 & LS2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 & LC2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

右図の場合

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C2 & 0 & S2 & L_1 S2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 & L_1 C2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C3 & 0 & S3 & L_2 S3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S3 & 0 & C3 & L_2 C3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$