

回転 (1)

単位ベクトル $\hat{e} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}$ まわりに 回転させた座標軸から、静止座標系への座標変換

マトリクスは下のごとくであった。

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi + C_x^2 V_\phi & -C_z \sin\phi + C_y C_x V_\phi & C_y \sin\phi + C_x C_z V_\phi \\ C_z \sin\phi + C_x C_y V_\phi & \cos\phi + C_y^2 V_\phi & -C_x \sin\phi + C_y C_z V_\phi \\ -C_y \sin\phi + C_x C_z V_\phi & C_x \sin\phi + C_y C_z V_\phi & \cos\phi + C_z^2 V_\phi \end{pmatrix}$$

ただし、

$$V_\phi = 1 - \cos\phi$$

この変換マトリクスは時点 $t = 0$ における、それぞれ回転座標上の x 、 y 、 z 軸の静止座標上での、単位ベクトル

$$\begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

がいかなる座標に変化するか計算するための係数マトリクスである。

今 $\phi = \omega \cdot dt \rightarrow 0$ とすると $\cos\phi \approx 1$ 、 $\sin\phi \approx \phi$ で

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \cdot C_x \\ \omega \cdot C_y \\ \omega \cdot C_z \end{pmatrix} \text{ だから}$$

$$R(dt) \approx \begin{pmatrix} 1 & -C_z\phi & C_y\phi \\ C_z\phi & 1 & -C_x\phi \\ -C_y\phi & C_x\phi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_z dt & \omega_y dt \\ \omega_z dt & 1 & -\omega_x dt \\ -\omega_y dt & \omega_x dt & 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{R(dt) - R(0)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

これから

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \hat{i}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \hat{j}$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \hat{k}$$

これで、回転に関する最も大切な公式がえられた。
 まとめて、もう一度書くと

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}$$

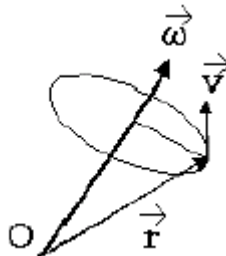
$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}$$

同じように、位置ベクトル \vec{r} は角速度 $\vec{\omega}$ で回転するが、平行移動のない場合は

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

あるいは書き直して

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



回転座標から見た回転 $\vec{\omega}_{rel}$

回転座標が角速度 $\vec{\omega}$ をもつものとする

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega C_x \\ \Omega C_y \\ \Omega C_z \end{pmatrix}$$

ところで、回転座標の x-y-z 軸は t = 0 の瞬間においては

$$\begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

だから、この瞬間では

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} + \omega_{relx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_{rely} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_{relz} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x + \omega_{relx} \\ \Omega_y + \omega_{rely} \\ \Omega_z + \omega_{relz} \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_{rel}$$

これもまた回転角速度に関する重要な公式である。

つぎに角加速度について考えてみよう。

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} + \omega_{relx} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} + \omega_{rely} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} + \omega_{relz} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

を微分すれば

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y \\ \dot{\Omega}_z \end{pmatrix} + \dot{\omega}_{relx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\omega}_{rely} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\omega}_{relz} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \omega_{relx} \begin{pmatrix} \dot{i}_x \\ \dot{i}_y \\ \dot{i}_z \end{pmatrix} + \omega_{rely} \begin{pmatrix} \dot{j}_x \\ \dot{j}_y \\ \dot{j}_z \end{pmatrix} + \omega_{relz} \begin{pmatrix} \dot{k}_x \\ \dot{k}_y \\ \dot{k}_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y \\ \dot{\Omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{relx} \\ \dot{\omega}_{rely} \\ \dot{\omega}_{relz} \end{pmatrix} + \omega_{relx} \begin{pmatrix} \dot{i}_x \\ \dot{i}_y \\ \dot{i}_z \end{pmatrix} + \omega_{rely} \begin{pmatrix} \dot{j}_x \\ \dot{j}_y \\ \dot{j}_z \end{pmatrix} + \omega_{relz} \begin{pmatrix} \dot{k}_x \\ \dot{k}_y \\ \dot{k}_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y \\ \dot{\Omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{relx} \\ \dot{\omega}_{rely} \\ \dot{\omega}_{relz} \end{pmatrix} + \omega_{relx} (\Omega \times \hat{i}) + \omega_{rely} (\Omega \times \hat{j}) + \omega_{relz} (\Omega \times \hat{k})$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y \\ \dot{\Omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{relx} \\ \dot{\omega}_{rely} \\ \dot{\omega}_{relz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_{relx} \\ \omega_{rely} \\ \omega_{relz} \end{pmatrix}$$

これも重要な公式である。

さて、回転座標から見て平行移動のない場合（回転座標上の静止点）は

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

あるいは
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
 であった。

ところで、回転座標から見て平行移動のある場合（回転座標上平行移動する点）の $t = 0$ における速度は

$$\vec{v} = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

あるいは
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{relx} \\ v_{rely} \\ v_{relz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
 である。

ここで、 $\vec{v}_{rel} = \dot{x} \cdot \hat{i} + \dot{y} \cdot \hat{j} + \dot{z} \cdot \hat{k}$ 、 $\vec{a}_{rel} = \ddot{x} \cdot \hat{i} + \ddot{y} \cdot \hat{j} + \ddot{z} \cdot \hat{k}$ としよう。 \hat{i} 、 \hat{j} 、 \hat{k} は回転座標軸 x-y-z の単位ベクトルである。すると

$$\frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x} \cdot \hat{i} + \dot{y} \cdot \hat{j} + \dot{z} \cdot \hat{k}) = \ddot{x} \cdot \hat{i} + \ddot{y} \cdot \hat{j} + \ddot{z} \cdot \hat{k} + \dot{x} \frac{d\hat{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d\hat{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d\hat{k}}{dt}$$

ところで、 $\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}$ 、 $\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}$ 、 $\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}$ を上に代入して、まとめると

$$\frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$$

つぎに

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

ゆえに $\vec{v} = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ を時間で微分すると

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_{rel} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

まとめると

$$\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

キネマテイクス公式集

点の運動に関して

速度

$$\vec{v} = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

加速度

$$\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

角速度

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} + \omega_{relx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_{rely} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_{relz} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x + \omega_{relx} \\ \Omega_y + \omega_{rely} \\ \Omega_z + \omega_{relz} \end{pmatrix}$$

角加速度

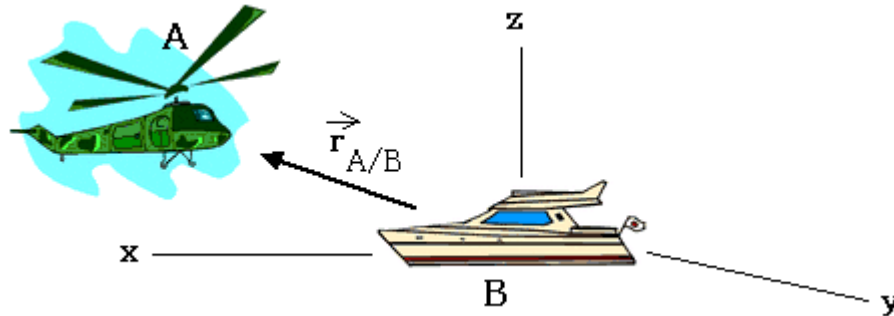
$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y \\ \dot{\Omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{relx} \\ \dot{\omega}_{rely} \\ \dot{\omega}_{relz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_{relx} \\ \omega_{rely} \\ \omega_{relz} \end{pmatrix}$$

回転座標の原点が平行運動をとまなうときは

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_B + \vec{a}_{rel} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/B} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

例題



ボートが静止座標にたいし一定速度 15m/s で進みながら、左へ一定割合 5°/s で向きをかえつつある。

ボートのレーダでとらえたヘリコプターはボートにとった座標にたいして次のとおりであった。

ヘリコプターの絶対速度と加速度をもとめよ。

$$\vec{r}_{A/B} = 420\hat{i} - 212\hat{j} + 236.2\hat{k} \quad \text{m}$$

$$\vec{v}_{A/B} = -53.5\hat{i} - 6.6\hat{j} + 2\hat{k} \quad \text{m/s}$$

$$\vec{a}_{rel} = 0.4\hat{i} + 13\hat{j} - 0.2\hat{k} \quad \text{m/s}^2$$

まず船の速度は $\vec{v}_B = 15\hat{i}$ m/s。

船の回転半径を R、回転角速度を ω とすると $\omega = 5\pi/180 = 15/R$ から $R = 3 \cdot 180/\pi$ 。

船の角速度は求心方向すなわち y 軸の方向に向かい

$$a_B = R\omega^2 = 13.09 \quad \text{m/s}^2$$

上を次の公式に入れて計算する。

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_B + \vec{a}_{rel} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/B} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

!rot02.bas 06-3-18

!Dynamics p.284 ex.6.1.1

dim Rab(3),vb(3),vrel(3),v(3),a(3),ab(3),arel(3)

dim w(3),wxRab(3),alfaxRab(3),wx_wxRab(3)

dim alfa(3),wxvrel(3),wxvrel2(3)

data 420,-212,236.2

mat read Rab

data -53.5,-6.6,2

mat read vrel

data 0.4,13,-0.2

mat read arel

let w(3)=5*pi/180

プリント結果

v=

-19.9995099288601

30.0519142918809

2

A=

-1.64656560144418

6.5859608266999

-.2

```
let vb(1)=15
let ab(2)=1.309

mat wxRab=cross(w,Rab)
mat v=vb+vrel
mat v=v+wxRab

print "v="
mat print v

mat alfaxRab=cross(alfa,Rab)
mat wx_wxRab=cross(w,wxRab)
mat wxvrel=cross(w,vrel)
mat wxvrel2=2*wxvrel

mat a=ab+arel
mat a=a+alfaxRab
mat a=a+wxvrel2
mat a=a+wx_wxRab

print "A="
mat print a

END
```