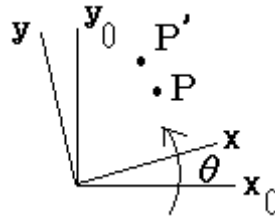


姿勢変換

2 D



点 P は手先座標 $x - y$ にある。手先が静止座標 $x_0 - y_0$ にたいし、原点まわり
に角度 θ だけ回転したものとす。点 P は点 P' となる。

静止座標からみた点 P' (x_0, y_0) の座標は下のように計算される。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ を姿勢変換行列という。

上の計算式の根拠は複素数をすでに知る諸君は、オイラーの式を思い出し下の
ようにすれば、たちどころに理解できるだろう。

角度 θ だけ回転するという事は、複素数の世界では $e^{i\theta}$ だけ掛けることである
から、

$$x_0 + iy_0 = (x + iy)e^{i\theta} = (x + iy)(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos \theta \cdot x - \sin \theta \cdot y + i(\sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y)$$

ゆえに
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

サンプルプログラムをしめす。

```

!rot01.bas
dim R(2,2),x0(2),x(2)

let x(1)=3          !x=3
let x(2)=4          !y=4
let t=5/6*pi        !回転角度 = 5 /6
let R(1,1)=cos(t)
let R(1,2)=-sin(t)

let R(2,1)=sin(t)
let R(2,2)=cos(t)
mat x0=R*x
print "x0=";x0(1) !静止座標の x0 座標値
print "y0=";x0(2) !静止座標の y0 座標値

END
    
```

手先がオイラー角 (zyz 型) で

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\pi/6 \\ \pi/2 \\ \pi/3 \end{pmatrix}$$

姿勢を変えたものとする。

手先に固定された x_e - y_e - z_e 軸の単位ベクトルを求めよ。

```
!euler01.bas

dim R1(3,3),R2(3,3),R3(3,3),R2R3(3,3),R1R2R3(3,3),R(3,3)

let t1=5/6*pi
let t2=pi/2
let t3=pi/3

let R1(1,1)=cos(t1)
let R1(1,2)=-sin(t1)
let R1(2,1)=sin(t1)
let R1(2,2)=cos(t1)
let R1(3,3)=1

let R2(1,1)=cos(t2)
let R2(1,3)=sin(t2)
let R2(2,2)=1
let R2(3,1)=-sin(t2)
let R2(3,3)=cos(t2)

let R3(1,1)=cos(t3)
let R3(1,2)=-sin(t3)
let R3(2,1)=sin(t3)
let R3(2,2)=cos(t3)
let R3(3,3)=1

mat R2R3=R2*R3
mat R=R1*R2R3

for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    let R(i,j)=round(R(i,j)*1000)/1000
  next j
next i

mat print R

END
```

打ち出し結果

-0.433	-0.25	-0.866
-0.75	-0.433	0.5
-0.5	0.866	0

座標軸の単位ベクトル

$$\hat{e}_x = R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.433 \\ -0.75 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_y = R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.433 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_z = R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.866 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

手先が姿勢を変えたものとする。 手先の座標系での点 P の静止座標系における座標を求めよ。

$$\text{オイラー角 (zyz 型)} \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\pi/6 \\ \pi/2 \\ \pi/3 \end{pmatrix} \quad \text{手先の座標系での位置 } \vec{P} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

!euler01b.bas

```
dim R1(3,3),R2(3,3),R3(3,3),R2R3(3,3),R1R2R3(3,3)
dim R(3,3),P(3,1),RP(3,1)
```

```
let t1=5/6*pi
let t2=pi/2
let t3=pi/3
```

```
let R1(1,1)=cos(t1)
let R1(1,2)=-sin(t1)
let R1(2,1)=sin(t1)
let R1(2,2)=cos(t1)
let R1(3,3)=1
```

```
let R2(1,1)=cos(t2)
let R2(1,3)=sin(t2)
let R2(2,2)=1
let R2(3,1)=-sin(t2)
let R2(3,3)=cos(t2)
```

```
let R3(1,1)=cos(t3)
let R3(1,2)=-sin(t3)
let R3(2,1)=sin(t3)
let R3(2,2)=cos(t3)
let R3(3,3)=1
```

```
mat R2R3=R2*R3
mat R=R1*R2R3
```

```
data 0.5,2,1
mat read P
```

```
mat RP=R*P
mat print RP
```

END

打ち出し結果

```
-----
-1.58253175473056
-.741025403784426
 1.48205080756888
-----
```

したがって、
静止座標系での位置は

$$\vec{P}_0 = \begin{pmatrix} -1.583 \\ -0.741 \\ 1.482 \end{pmatrix}$$

手先が姿勢を変えたものとする。手先の座標系における点Pの座標を求めよ。

$$\text{オイラー角 (zyz 型)} \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\pi/6 \\ \pi/2 \\ \pi/3 \end{pmatrix} \quad \text{静止座標系での位置 } \vec{P}_0 = \begin{pmatrix} -1.563 \\ -0.741 \\ 1.482 \end{pmatrix}$$

!euler01c.bas

```
dim R1(3,3),R2(3,3),R3(3,3),R2R3(3,3)
dim R(3,3),X(3,1),U(3,1),iR(3,3)
```

```
let t1=5/6*pi
let t2=pi/2
let t3=pi/3
```

打ち出し結果

```
let R1(1,1)=cos(t1)
let R1(1,2)=-sin(t1)
let R1(2,1)=sin(t1)
let R1(2,2)=cos(t1)
let R1(3,3)=1
```

```
-----
.500216511908155
2.00012500687538
1.00043302381631
-----
```

```
let R2(1,1)=cos(t2)
let R2(1,3)=sin(t2)
let R2(2,2)=1
let R2(3,1)=-sin(t2)
let R2(3,3)=cos(t2)
```

したがって、
手先座標系での位置は

```
let R3(1,1)=cos(t3)
let R3(1,2)=-sin(t3)
let R3(2,1)=sin(t3)
let R3(2,2)=cos(t3)
let R3(3,3)=1
```

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0.500 \\ 2.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

```
mat R2R3=R2*R3
mat R=R1*R2R3
```

```
data -1.583,-0.741,1.482
mat read X
```

```
mat iR=inv(R)
mat U=iR*X
mat print U
```

END

基本回転マトリクスが R のときオイラー角をもとめよ。

$$R = \begin{pmatrix} -0.127 & -0.78 & 0.612 \\ 0.927 & 0.127 & 0.354 \\ -0.354 & 0.612 & 0.707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = ?$$

$$= \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 \\ s1 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c2 & 0 & s2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s2 & 0 & c2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 \\ s3 & c3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c1 \cdot c2 \cdot c3 - s1 \cdot s3 & -c1 \cdot c2 \cdot s3 - s1 \cdot c3 & c1 \cdot s2 \\ s1 \cdot c2 \cdot c3 + c1 \cdot s3 & -s1 \cdot c2 \cdot s3 + c1 \cdot c3 & s1 \cdot s2 \\ -s2 \cdot c3 & s2 \cdot s3 & c2 \end{bmatrix}$$

を利用する。この場合は計算のあとかならず検算のプログラムを入れ誤差を確認する。姿勢によっては全く異なった検算結果がでる。その理由を考えよう。

```
!euler03b.bas
!R を与えてオイラー角を求める。
dim
R1(3,3),R2(3,3),R3(3,3),R2R3(3,3)
dim R(3,3),X(3,1),U(3,1),iR(3,3)

data -0.127,-0.78,0.612
data 0.927,0.127,0.354
data -0.354,0.612,0.707

mat read R

let c2=R(3,3)
let t2=acos(c2)
let s2=sin(t2)

let s3=R(3,2)/s2
let t3=asin(s3)
let c3=cos(t3)

let s1=R(2,3)/s2
let t1=asin(s1)
let c1=cos(t1)

print t1;t2;t3

!*****検算*****
let R1(1,1)=cos(t1)
let R1(1,2)=-sin(t1)
let R1(2,1)=sin(t1)
let R1(2,2)=cos(t1)
let R1(3,3)=1
let R2(1,1)=cos(t2)
let R2(1,3)=sin(t2)
let R2(2,2)=1
let R2(3,1)=-sin(t2)
let R2(3,3)=cos(t2)
let R3(1,1)=cos(t3)
let R3(1,2)=-sin(t3)
let R3(2,1)=sin(t3)
let R3(2,2)=cos(t3)
let R3(3,3)=1
mat R2R3=R2*R3
mat R=R1*R2R3
for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    let
      R(i,j)=round(R(i,j)*1000)/1000
  next j
next i
mat print R
END
```

打ち出し結果

.524240934539792
.785549163399744
1.0458843157116

検算結果

-.126 -.78 .612
.927 .128 .354
-.354 .612 .707

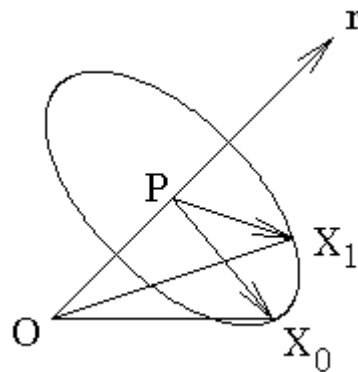
基本回転マトリクスが R のときオイラー角をもとめよ。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = ?$$

全く異なった検算結果がでた。 その理由を考えよう。 解は今一歩で出る。

修正プログラムを考えよう。

<pre>!euler03a.bas !R を与えてオイラー角を求める。 dim R1(3,3),R2(3,3),R3(3,3),R2R3(3,3) dim R(3,3),X(3,1),U(3,1),iR(3,3) data 0,0.5,-0.866 data 0,0.866,0.5 data 1,0,0 mat read R let c2=R(3,3) let t2=acos(c2) let s2=sin(t2) let s3=R(3,2)/s2 let t3=asin(s3) let c3=cos(t3) let s1=R(2,3)/s2 let t1=asin(s1) let c1=cos(t1) print t1;t2;t3</pre>	<pre>!*****検算***** let R1(1,1)=cos(t1) let R1(1,2)=-sin(t1) let R1(2,1)=sin(t1) let R1(2,2)=cos(t1) let R1(3,3)=1 let R2(1,1)=cos(t2) let R2(1,3)=sin(t2) let R2(2,2)=1 let R2(3,1)=-sin(t2) let R2(3,3)=cos(t2) let R3(1,1)=cos(t3) let R3(1,2)=-sin(t3) let R3(2,1)=sin(t3) let R3(2,2)=cos(t3) let R3(3,3)=1 mat R2R3=R2*R3 mat R=R1*R2R3 for i=1 to 3 for j=1 to 3 let R(i,j)=round(R(i,j)*1000)/1000 next j next i mat print R END</pre>	<pre>打ち出し結果 ----- .523598775598299 .5707963267949 0 ----- 検算結果 0 -.5 .866 0 .866 .5 -1 0 0</pre>
--	---	---



ベクトル r まわりに 回転させた座標軸から、静止座標系への座標変換マトリクスをもとめる。

 第 1 の方法

x 軸の単位ベクトル $\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (点 X_0) が r の単位ベクトル $\hat{e} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}$ まわりに まわ

って点 $X_1 (x_1, y_1, z_1)$ になるものとする。点 P はベクトル r 上の、点 X_0 、 X_1 からおろした垂線との交点とする。

すると、線分 OP の長さは C_x 、線分 PX_0 および PX_1 の長さは S_x である。

したがって、点 P は $\vec{P} = \begin{pmatrix} C_x C_x \\ C_x C_y \\ C_x C_z \end{pmatrix}$ となる。ここで、

$\vec{X}_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - C_x C_x \\ y_1 - C_x C_y \\ z_1 - C_x C_z \end{pmatrix}$ とおくと、 $\hat{e} \cdot \vec{X}_P = 0$ 、 $(\hat{i} - \vec{P}) \cdot \vec{X}_P = S_x^2 \cos \phi$ から、

$$C_x x_P + C_y y_P + C_z z_P = 0 \quad (1)$$

$$(1 - C_x^2) x_P - C_x C_y y_P - C_x C_z z_P = S_x^2 \cos \phi \quad (2)$$

以上から $x_P = S_x^2 \cos \phi \quad (3)$

つぎに、 $(\hat{i} - \bar{P}) \times \bar{X}_P = S_x^2 \sin \phi \cdot \hat{e}$ から

$$\begin{pmatrix} -C_x C_y z_P + C_x C_z y_P \\ -C_x C_z x_P - (1 - C_x^2) z_P \\ (1 - C_x^2) y_P + C_x C_y x_P \end{pmatrix} = S_x^2 \sin \phi \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

(3) \ (4) から $y_P = C_z \sin \phi - C_x C_y \cos \phi$ 、 $z_P = -C_y \sin \phi - C_x C_z \cos \phi$ 。

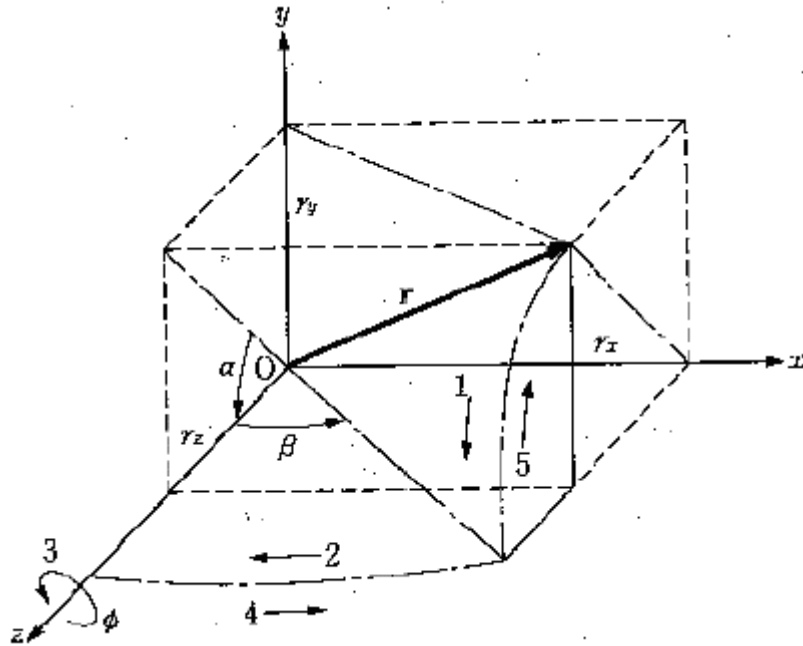
以上から x 軸の単位ベクトルは回転して次のベクトルとなる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi + C_x^2 (1 - \cos \phi) \\ C_z \sin \phi + C_x C_y (1 - \cos \phi) \\ -C_y \sin \phi + C_x C_z (1 - \cos \phi) \end{pmatrix}$$

おなじように y 軸、z 軸の単位ベクトルをもとめ、 $V_\phi = 1 - \cos \phi$ として、次の姿勢変換マトリクスを得る。

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi + C_x^2 V_\phi & -C_z \sin \phi + C_y C_x V_\phi & C_y \sin \phi + C_x C_z V_\phi \\ C_z \sin \phi + C_x C_y V_\phi & \cos \phi + C_y^2 V_\phi & -C_x \sin \phi + C_y C_z V_\phi \\ -C_y \sin \phi + C_x C_z V_\phi & C_x \sin \phi + C_y C_z V_\phi & \cos \phi + C_z^2 V_\phi \end{pmatrix}$$

第2の方法（「ロボット工学」遠山著、コロナ社 p.26 による）



図のように、一度ベクトル r を z 軸まで移動して、 z 軸で回転させてから、元へもどして、座標がどうなったかを見る。

1. $R_{x,\alpha}$
2. $R_{y,-\beta}$
3. $R_{z,\phi}$
4. $R_{y,\beta}$
5. $R_{x,-\alpha}$

から

$$R_{r,\phi} = R_{x,-\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\phi} R_{y,-\beta} R_{x,\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\alpha & S_\alpha \\ 0 & -S_\alpha & C_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\beta & 0 & S_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\beta & 0 & C_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\beta & 0 & -S_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\beta & 0 & C_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\alpha & -S_\alpha \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_\phi + r_x^2 V_\phi & -r_z S_\phi + r_y r_x V_\phi & r_y S_\phi + r_x r_z V_\phi \\ r_z S_\phi + r_x r_y V_\phi & C_\phi + r_y^2 V_\phi & -r_x S_\phi + r_y r_z V_\phi \\ -r_y S_\phi + r_y r_z V_\phi & r_x S_\phi + r_y r_z V_\phi & C_\phi + r_z^2 V_\phi \end{pmatrix}$$

ただし、 $V_\phi = 1 - \cos \phi$ 、

$$S_\alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}, \quad S_\beta = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}, \quad C_\alpha = \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}, \quad C_\beta = \frac{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$