

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

$$L = K - P$$

K 運動エネルギー

P ポテンシャルエネルギー



アームの固定ピボットまわりの慣性 2 次モーメントを J とする。

固定ピボットからアームの質量中心までの長さを l 、質量を m とする。

垂線からのアームの傾き角を θ とするとき、ピボットにおけるトルク T を求める運動方程式をたてよ。

運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

ポテンシャルエネルギーは平衡点を基準 0 として $P = mgl(\cos \theta - 1)$

ゆえに、

$$L = K - P = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgl - mgl \cos \theta$$

ゆえにトルクは

$$T = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = J \ddot{\theta} - mg \sin \theta$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

$$L = K - P$$

K 運動エネルギー

P ポテンシャルエネルギー



固定ピボットからアームの質量中心までの長さを l 、質量を m 、ピボットまわりの慣性 2 次モーメントを J とすると、質量中心まわりの慣性 2 次モーメントは $J_c = J - ml^2$ である。

垂線からのアームの傾き角を時計まわりとして、ピボットにおける発生力 \vec{B} を求める運動方程式をたてよ。

$$L = K - P = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgl - mgl \cos \theta = \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl - mgl \cos \theta$$

ピボット中心を原点とし、質量中心の座標を (x, y) とすると $x = l \sin \theta$ 、

$y = l(\cos \theta - 1)$ だから $\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta$ 、 $\dot{y} = -l\dot{\theta} \sin \theta$ 。 また、 $\ddot{x} = l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta$ 、

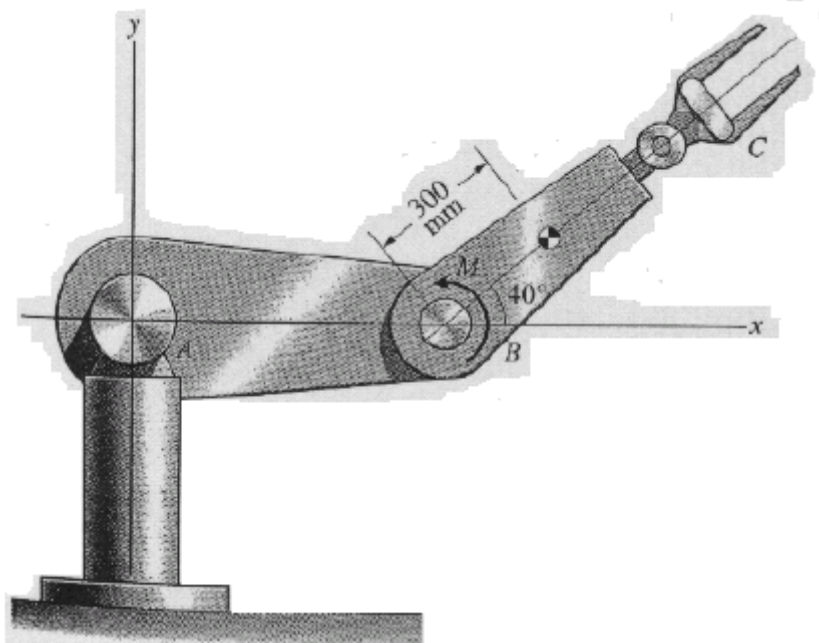
$\ddot{y} = -l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta$ 。 したがって、上の式は下のようになる。

$$L = K - P = \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

ところで、 (x, y) は θ に依存するが、 θ は (x, y) に依存しないから

$$B_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} = ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$B_y = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + mg = -ml\ddot{\theta} \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \cos \theta + mg$$



アーム BC の質量は 12 kg で、質量中心まわりの慣性モーメントは 3 kgm² である。点 B が停止しており、アームが現姿勢で 2 rad/s で反時計まわりに定回転するとき、B におけるアームのトルクと力を求めよ。

を水平線から上向きにとると $L = K - P = \frac{1}{2}(J + ml^2)\dot{\theta}^2 - mgl \sin \theta$

点 B におけるアームに対するトルクは

$$T = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = (J + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \cos \theta$$

$$= (3 + 12 \cdot 0.3^2) \cdot 0 + 12 \cdot 9.8 \cdot 0.3 \cos 40^\circ = 27 \text{ Nm}$$

質量中心まわりに考えると、座標 $x = l \cos \theta$ 、 $y = l \sin \theta$ から

$$\dot{x} = -l\dot{\theta} \sin \theta, \quad y = l\dot{\theta} \cos \theta \quad \text{と} \quad \ddot{x} = -l\dot{\theta}^2 \cos \theta - l\ddot{\theta} \sin \theta, \quad \ddot{y} = -l\dot{\theta}^2 \sin \theta + l\ddot{\theta} \cos \theta$$

ここで平行移動と回転を切り離すと $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgy$ でもある。

((x,y) は θ に依存するが、 $\dot{\theta}$ は (x,y) に依存しない) $\ddot{\theta} = 0$ 、 $\dot{\theta} = 2$ から

$$B_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} = -ml\dot{\theta}^2 \cos \theta = -11 \text{ N}$$

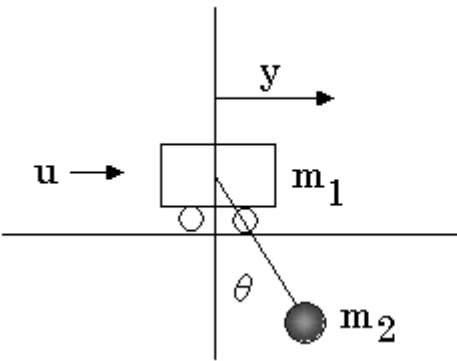
$$B_y = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + mg = -ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + mg = 108 \text{ N}$$

ラグランジュの運動方程式

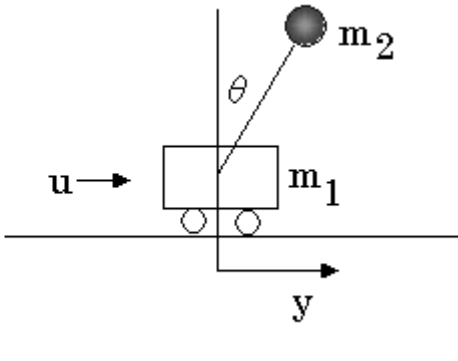
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

L = K - P
K 運動エネルギー
P ポテンシャルエネルギー

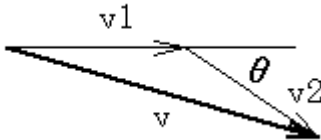
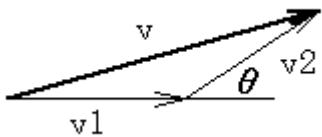
振り子と倒立振り子



(1) 振り子



(2) 逆さ振り子



運動エネルギーをもとめるため、まず、振り子の速度の2乗を計算しよう。台車の速度を v1、振り子による速度を v2 とすると、

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \theta$$

振り子の長さを l とすると、

$v_1 = \dot{y}$ 、 $v_2 = l\dot{\theta}$ を考慮して、運動エネルギーは振り子、逆さ振り子とも

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta)$$

ポテンシャルエネルギーは平衡点を基準 0 として

振り子では $P = m_2gl(1 - \cos\theta)$ 逆振り子では $P = m_2gl(\cos\theta - 1)$ である。

(1) 振り子では

$$L = K - P = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta) - m_2gl(1 - \cos\theta)$$

したがって、y に関して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta = u$$

ここで、 l が十分小さい場合近似的に変形して、上の式は次の大切な式となる。

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l\ddot{\theta} = u} \quad \text{----- A}$$

に関して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m_2l^2\ddot{\theta} + m_2l\ddot{y}\cos\theta - m_2l\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta + m_2l\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta + m_2gl\sin\theta = 0$$

l が十分小さいことを考慮して、上の式は次の大切な式となる。

$$\boxed{l\ddot{\theta} + \ddot{y} + g\theta = 0} \quad \text{----- B}$$

(2) 逆振り子では上と同様にして、

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l\ddot{\theta} = u} \quad \text{----- A}$$

$$\boxed{l\ddot{\theta} + \ddot{y} - g\theta = 0} \quad \text{----- B}$$