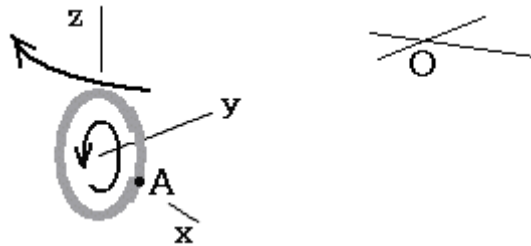


3 Dキネマティクスの問題



車の半径 0.36 m のタイヤが平面を転がる。 タイヤの芯は 5 m/s の速度をもつ。 タイヤ中心 B が回転半径 10 m で車は曲がりつつある。

(1) タイヤの角速度ベクトルを求めよ。

(2) タイヤ最後部の点 A (タイヤ幅の中心にある) この瞬間の速度ベクトルを求めよ。

(Dynamics, Bedford & Fowler, Addison-Wesley Pub.,p.424)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

!!kin002c.bas 06-2-19

dim Vb(3),w(3),Rab(3),Va(3)

dim wx_Rab(3),WW(3),weL(3)

let Vb(1)=-5

let Rab(1)=0.36

let WW(3)=-0.5

let weL(2)=-13.9

mat w=WW+weL

mat wx_Rab=cross(w,Rab)

mat Va=Vb+wx_Rab

print "w"

mat print w

print "Va=";Va(1);Va(2);Va(3)

END

車角速度

=-5/10

タイヤ角速度 el

=-5/0.36

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

プリント結果

0 -13.9 -.5

Va=-5 -.18 5.004

剛体の角速度と角加速度ベクトルが $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 200 \\ 900 \\ -600 \end{pmatrix}$ と $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 8000 \\ -8000 \\ -4000 \end{pmatrix}$ である。

静止座標原点 O に対する、剛体の質量中心の位置と速度ベクトルはそれぞれ

$\vec{r}_G = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ (m) と $\vec{v}_G = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ -60 \end{pmatrix}$ (m/s) である。剛体中の点 A $\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5.8 \\ 6.4 \\ 1.6 \end{pmatrix}$ (m)

の点 O にたいする速度ベクトルを求めよ。

また、剛体の重心が、点 O にたいして加速度 0 のとき、点 O にたいする点 A の加速度をもとめよ。

(Dynamics, Bedford & Fowler, Addison-Wesley Pub., p.427)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

! !kin003c.bas 06-2-15

!Dynamics p.427 Prob.9.1 & 9.2

```
dim Vb(3),w(3),Rab(3),Ra(3),Va(3),Rg(3),Vg(3)
dim wxRab(3),WW(3),wreL(3),a(3),aa(3),ab(3)
dim axRab(3),wx_wxRab(3)
```

```
data 200,900,-600
```

```
mat read w
```

```
data 6,6,2
```

```
mat read Rg
```

```
data 100,80,-60
```

```
mat read Vg
```

```
data 5.8,6.4,1.6
```

```
mat read Ra
```

```
mat Rab=Ra-Rg
```

```
mat wxRab=cross(w,Rab)
```

```
mat Va=Vg+wxRab
```

```
print "Va="
```

```
mat print Va
```

```
!-----Prob 9.2-----
```

```
data 8000,-8000,-4000
```

```
mat read a
```

```
!aa=ab+alpha*Rab+omega(omegaRab)
```

```
mat axRab=cross(a,Rab)
```

```
mat wx_wxRab=cross(w,wxRab)
```

```
mat aa=ab+axRab
```

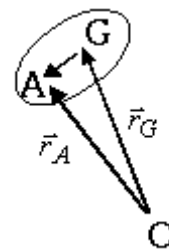
```
mat aa=aa+wx_wxRab
```

```
mat aa=0.001*aa
```

```
print "aa="
```

```
mat print aa
```

```
END
```



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{a}_A$$

$$= \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

飛行機の角速度と角加速度ベクトルが $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ (rad/s) と $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。

飛行機の重心を座標原点とすると、点 A $\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 0.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ (m) の、重心にたい

する相対速度ベクトルを求めよ。 また、相対加速度ベクトルをもとめよ。

(Dynamics, Bedford & Fowler, Addison-Wesley Pub., p.427)

!kin004b.bas 06-2-15
!Dynamics p.427 Prob.9.3 & 9.4

dim Vb(3),w(3),Rab(3),Va(3),Rg(3),Vg(3),Vab(3)
dim wxRab(3),a(3),aa(3),ab(3)
dim axRab(3),wx_wxRab(3)

data 4,6.4,0.2
mat read w
data 2.4,0.6,0.6
mat read Rab

mat wxRab=cross(w,Rab)
mat Vab=wxRab

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\text{で } \vec{v}_B = 0$$

print "Vab="
mat print Vab
!-----Prob 9.4-----

data -4,12,2
mat read a
!aa=ab+a*Rab+wx(wxRab)

mat axRab=cross(a,Rab)

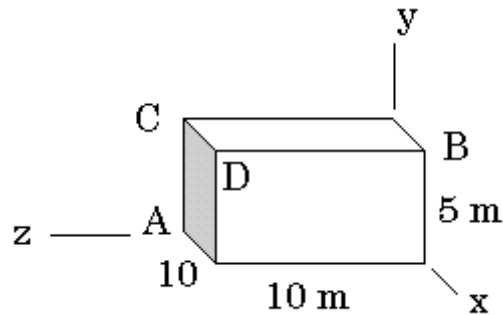
mat wx_wxRab=cross(w,wxRab)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

$$\text{で } \vec{a}_B = 0$$

mat aa=ab+axRab
mat aa=aa+wx_wxRab
print "aa="

mat print aa
END



直角 6 面体が固定軸 A - B のまわりに、時計方向に 30 rad/s で回転している。

(a) 角速度ベクトルをもとめよ。

(b) 点 C と D の速度ベクトルと加速度ベクトルをもとめよ。

(Dynamics, Bedford & Fowler, Addison-Wesley Pub.,p.427)

```

-----
! !kin005b.bas 06-2-15
!Dynamics p.427 Prob.9.7 & 9.8

dim Vb(3),w(3),Rab(3),Ra(3),Va(3),Rg(3),Vg(3),Vab(3)
dim wxRab(3),wreL(3),a(3),aa(3),ab(3)
dim axRab(3),wx_wxRab(3)

!-----prob. 9.5-----
data 10,5,-10
mat read w
mat w=(30/sqr(10^2+5^2+10^2))*w
mat print w

!-----point C-----
data 0,5,0
mat read Rab

mat wxRab=cross(w,Rab)
mat Vab=wxRab

print "velocity of point C Vab="
mat print Vab

!-----point D-----
data 10,5,0
mat read Rab

mat wxRab=cross(w,Rab)
mat Vab=wxRab

print "velocity of point D Vab="
mat print Vab

!-----Prob 9.6-----
!-----point C-----
data 0,5,0
mat read Rab
data 0,0,0
mat read a

!aa=ab+a*Rab+wx(wxRab)

mat axRab=cross(a,Rab)
mat wxRab=cross(w,Rab)
mat wx_wxRab=cross(w,wxRab)

mat aa=ab+axRab
mat aa=aa+wx_wxRab
print "acceleration of point C aa="
mat print aa

END

```

タービンが固定軸 $O(0,0,0)$ $A(7,4,4)$ を結ぶ軸のまわりに、反時計方向に 900 rad/s で回転している。

- (a) 角速度ベクトルをもとめよ。
 (b) タービン上の点(3,2,2)の速度ベクトルをもとめよ。
 (c) 100 rad/s² で減速するとき、この点の加速度ベクトルをもとめよ。

(Dynamics, Bedford & Fowler, Addison-Wesley Pub.,p.427)

```

-----
! !kin006b.bas 06-2-15
! 3 D キネマティクス
!Dynamics p.427 Prob.9.7 & 9.8

dim Vb(3),w(3),Rab(3),Ra(3),Va(3),Rg(3),Vg(3),Vab(3)
dim wxRab(3),wreL(3),a(3),aa(3),ab(3)
dim axRab(3),wx_wxRab(3)

!-----prob. 9.7-----
data 7,4,4
mat read w
mat w=(900/sqr(7^2+4^2+4^2))*w
mat print w

!-----point C-----
data 3,2,2
mat read Rab

mat wxRab=cross(w,Rab)
mat Vab=wxRab

print "velocity of point C Vab="
mat print Vab
!-----Prob 9.8-----
!-----point C-----
data 7,4,4
mat read a
mat a=(100/sqr(7^2+4^2+4^2))*a
print "angular acceleration vector a"
mat print a

!aa=ab+a*Rab+wx(wxRab)

mat axRab=cross(a,Rab)
mat wxRab=cross(w,Rab)
mat wx_wxRab=cross(w,wxRab)

mat aa=ab+axRab
mat aa=aa+wx_wxRab
print "acceleration of point C aa="
mat print aa

END

```

ジャイロスコープの円形フレームが垂直軸まわりに、上から見て反時計方向に 2 rad/s で回転している。 外径 7 cm のフライホイールがフレームにたいし相対角速度 10 rad/s でまわっている。

フライホイール外周上の上から 2 時の位置にある点 B と、フライホイール軸の延長線上で中心から 6 cm の位置にあるフレームの点 A の、静止座標原点に対する、相対速度ベクトルをもとめよ。

(Dynamics, Bedford & Fowler, Addison-Wesley Pub., p.428)

```

-----
!kin007b.bas 06-2-15
!Dynamics p.428 Prob.9.12

dim Vb(3),w(3),Rab(3),Ra(3),Va(3),Rg(3),Vg(3),Vab(3)
dim wxRab(3),WW(3),wreL(3),a(3),aa(3),ab(3)
dim axRab(3),wx_wxRab(3)

!-----prob. 9.12-----
data 0,2,0
mat read WW
data 0,0,1
mat read wreL
mat wreL=10*wreL
mat print wreL
mat w=WW+wreL

!-----point A-----
data 0,0,5
mat read Rab

mat wxRab=cross(w,Rab)

mat Vab=wxRab

print "velocity of point A Vab="
mat print Vab

!-----point B-----

let Rab(1)=3.5*cos(pi*30/180)
let Rab(2)=3.5*sin(pi*30/180)
let Rab(3)=0

mat wxRab=cross(w,Rab)

mat Vab=wxRab

print "velocity of point B Vab="
mat print Vab

END

```

前の問題で、フレームとフライホイールの回転速度の大きさが一定である場合、点 B と点 A の静止座標原点にたいする相対速度ベクトルをもとめよ。

(Dynamics, Bedford & Fowler, Addison-Wesley Pub.,p.429)

```

-----
! !kin008b.bas 06-2-15
!Dynamics p.429 Prob.9.13

dim Vb(3),w(3),Rab(3),Ra(3),Va(3),Rg(3),Vg(3),Vab(3)
dim wxRab(3),WW(3),wreL(3),a(3),aa(3),ab(3)
dim A(3),B(3),AxB(3),axRab(3),wx_wxRab(3)

mat aa=aa+wx_wxRab
print "acceleration of point B aa="
mat print aa

END

!-----prob. 9.13-----
data 0,2,0
mat read WW
data 0,0,1
mat read wreL
mat wreL=10*wreL
mat print wreL
mat w=WW+wreL

!-----point A-----
data 0,0,6
mat read Rab

mat wxRab=cross(w,Rab)
mat Vab=wxRab

print "velocity of point A Vab="
mat print Vab

mat wx_wxRab=cross(w,wxRab)

mat aa=ab+axRab
mat aa=aa+wx_wxRab
print "acceleration of point A aa="
mat print aa

!-----point B-----
let Rab(1)=3.5*cos(pi*30/180)
let Rab(2)=3.5*sin(pi*30/180)
let Rab(3)=0

mat wxRab=cross(w,Rab)

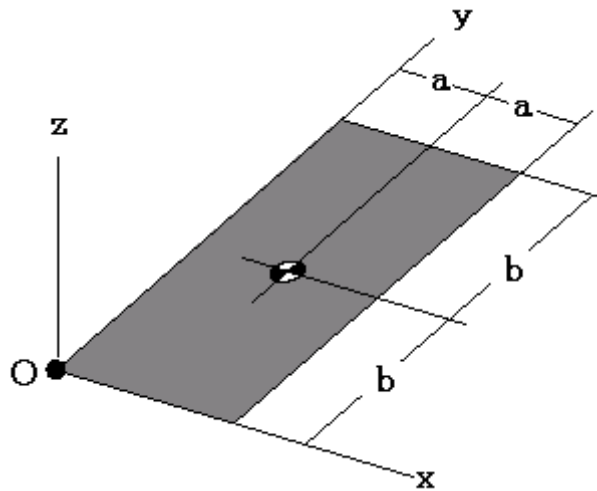
mat Vab=wxRab

print "velocity of point B Vab="
mat print Vab

mat wx_wxRab=cross(w,wxRab)

mat aa=ab+axRab

```



組み立て工程で、4 kg の長方形 ($a = 150 \text{ mm}$ 、 $b = 300 \text{ mm}$) の鉄板が点 O でマニプレータにつかまれている。今の瞬間で鉄板は水平にあり、その角速度と角加速度は以下のとおりである。マニプレータにより鉄板に加えられるモーメントはいくらか？

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rad/s} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rad/s}^2$$

ただし、鉄板の点 O まわりの慣性行列は次のとおりとする。

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 & -0.18 & 0 \\ -0.18 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

解法

ここで、座標軸は鉄板に固定されているから、座標軸の角速度はその角速度と等しい。

したがって、点 O まわりのモーメントの合計は

$$\begin{pmatrix} \sum M_{ox} \\ \sum M_{oy} \\ \sum M_{oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \right)$$

点 O まわりのモーメントの合計はマニプレータによるモーメント \vec{C} と鉄板の重さによるものだから

$$\sum \vec{M}_O = \vec{C} + \vec{r} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

これら 2 個の方程式からマニプレータによるモーメント \vec{C} が計算できる。
では十進 BASIC で計算しよう。

```
!! 3Dキネ11a.bas 06-2-19
dim r(3),I(3,3),w(3),aa(3),C(3),M0(3),fg(3)   print "Cx=   Cy=   Cz=   [Nm]"
dim Idwdt(3),Iw(3),wxIw(3),rxfg(3)         mat print C

let g=9.81                                   END
let m1=4
data 0.15,0.3,0                               END
mat read r
                                            プリント結果
data 0.48,-0.18,0                             Cx=   Cy=   Cz=   [Nm]
data -0.18,0.12,0                             5.892  -3.366  .72
data 0,0,0.6
mat read I

data 4,-2,0
mat read w

data -10,6,0
mat read aa

mat Idwdt=I*aa
mat Iw=I*w
mat wxIw=cross(w,Iw)

mat M0=Idwdt+wxIw

let fg(3)=-m1*g

mat rxfg=cross(r,fg)

mat C=M0-rxfg                                ---
```