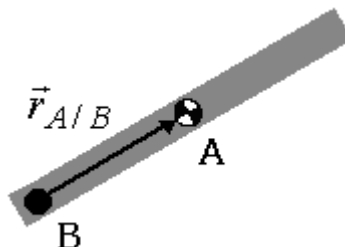


平面運動の問題

大切な公式



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{a}_{A/B} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{A/B} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

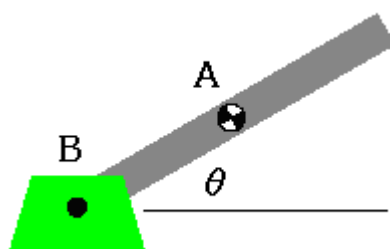
$$\vec{a}_{A/B} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

重心まわりにたいして

ニュートンの方程式 $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

オイラーの方程式 $\sum \vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt}$

例題 1



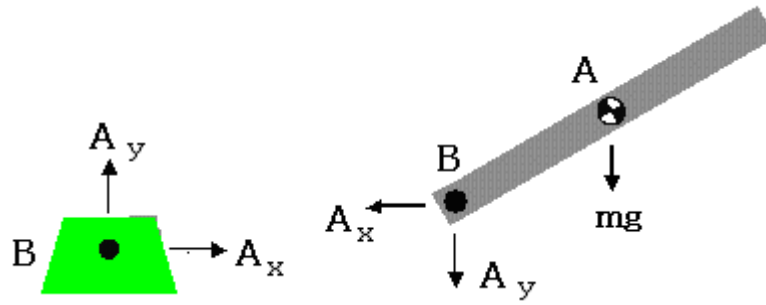
マニプレータのアームを考える。長さ L 、点 B から重心 A までの距離 Lc_1 、質量 m 、重心まわりの慣性モーメント J 。

角度 θ の位置で、 $\dot{\theta} = \omega$ 、 $\ddot{\theta} = \alpha$ で動かしたい。

点 B にて、いくらのトルクが必要か？

また、点 B にかかる力はいくらか？

解法



$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{G/B} = \begin{pmatrix} L_{c1} \cos \theta \\ L_{c1} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{G/B} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{G/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{G/B})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_{c1} \cos \theta \\ L_{c1} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_{c1} \cos \theta \\ L_{c1} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -L_{c1} S_1 \alpha - L_{c1} C_1 \omega^2 \\ L_{c1} C_1 \alpha - L_{c1} S_1 \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{G/B} = m \begin{pmatrix} -L_{c1} S_1 \alpha - L_{c1} C_1 \omega^2 \\ L_{c1} C_1 \alpha - L_{c1} S_1 \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_x \\ -A_y - mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

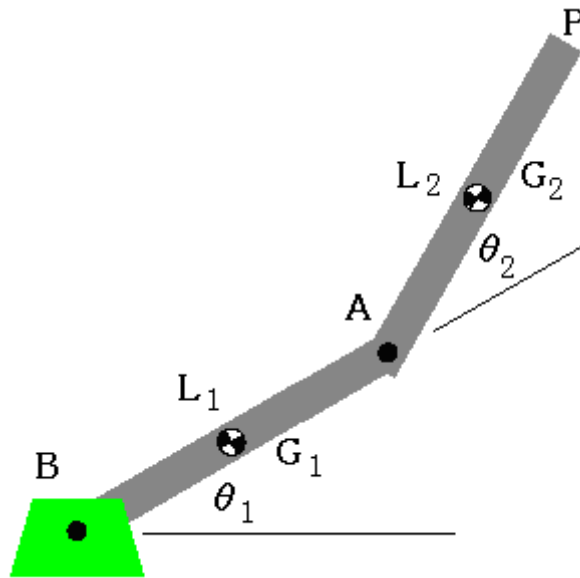
$$\sum \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_B - L_{c1} S_1 A_x + L_{c1} C_1 A_y \end{pmatrix} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(1) 必要なトルク $M_B = J\alpha + L_{c1} S_1 A_y - L_{c1} C_1 A_x$

(2) B点にかかる力

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} L_{c1} S_1 \alpha + L_{c1} C_1 \omega^2 \\ -L_{c1} C_1 \alpha + L_{c1} S_1 \omega^2 - g \\ 0 \end{pmatrix}$$

例題 2



マニプレータの2個からなるアームを考える。

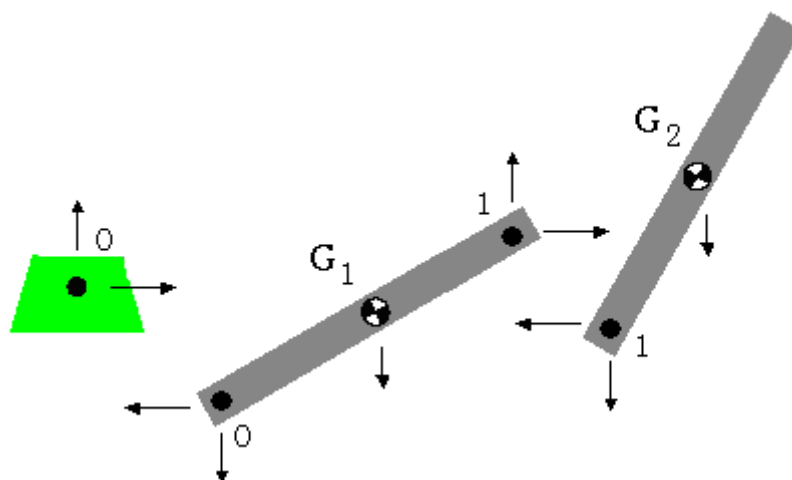
長さ L_1 、点 B から重心までの距離 L_{c1} 、質量 m_1 、重心まわりの慣性モーメント J_1 。

長さ L_2 、点 B から重心 A までの距離 L_{c2} 、質量 m_2 、重心まわりの慣性モーメント J_2 。

角度 θ_1 の位置で、 $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ 、 $\ddot{\theta}_1 = \alpha_1$ 、角度 θ_2 の位置で、 $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ 、 $\ddot{\theta}_2 = \alpha_2$ で動かしたい。

- (1) 点 A にて、かかる力はいくらか？ いくらのトルクが必要か？
- (2) 点 B にて、かかる力はいくらか？ いくらのトルクが必要か？

解法



節点 1 を考える。

$$\begin{aligned} \vec{\theta} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} & \vec{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} & \vec{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} & \vec{r}_{1/0} &= \begin{pmatrix} L_1 C_1 \\ L_1 S_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{a}_{1/0} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{1/0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{1/0}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_1 C_1 \\ L_1 S_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_1 C_1 \\ L_1 S_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -L_1 S_1 \alpha_1 - L_1 C_1 \omega_1^2 \\ L_1 C_1 \alpha_1 - L_1 S_1 \omega_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A 点 (節点 1) においてアーム L2 について

$$\begin{aligned} \vec{\theta} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} & \vec{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} & \vec{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \vec{\theta} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} & \vec{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 + \omega_2 \end{pmatrix} & \vec{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} & \vec{r}_{G_2/1} &= \begin{pmatrix} L_{c2} C_{12} \\ L_{c2} S_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{a}_{G_2/1} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{G_2/1} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{G_2/1}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_{c2} C_{12} \\ L_{c2} S_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 + \omega_2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 + \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_{c2} C_{12} \\ L_{c2} S_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -L_{c2} S_{12} (\alpha_1 + \alpha_2) - L_{c2} C_{12} (\omega_1 + \omega_2)^2 \\ L_{c2} C_{12} (\alpha_1 + \alpha_2) - L_{c2} S_{12} (\omega_1 + \omega_2)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上から $\vec{a}_{G_2} = \vec{a}_{1/0} + \vec{a}_{G_2/1}$ がもとめられる。これを下に代入する。

$$\sum \vec{F} = m_2 \vec{a}_{G_2} = \begin{pmatrix} -A_{1x} \\ -A_{1y} - m_2 g \\ 0 \end{pmatrix}$$

節点 1 (点 A)にかかる力は

$$\begin{pmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} = -m_2 \vec{a}_{G_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{pmatrix}$$

つぎに、節点 1 (点 A)でのトルクを M_1 とすると、L2 の重心まわりのモーメントの合計から

$$\sum \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 - L_{c2} S_{12} A_{1x} + L_{c2} C_{12} A_{1y} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}$$

以上から節点 1 (点 A)での必要なトルク

$$M_1 = J_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + L_{c2} S_{12} A_{1x} - L_{c2} C_{12} A_{1y}$$

節点 0 (点 B)について考える。

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{G_1/0} = \begin{pmatrix} L_{c1} C_1 \\ L_{c1} S_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{G_1/0} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{G_1/0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{G_1/0})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_{c1} C_1 \\ L_{c1} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_{c1} C_1 \\ L_{c1} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -L_{c1} S_1 \alpha_1 - L_{c1} C_1 \omega_1^2 \\ L_{c1} C_1 \alpha_1 - L_{c1} S_1 \omega_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

節点 0 (点 B)にかかる力

$$\begin{pmatrix} A_{0x} \\ A_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} L_{c1} S_1 \alpha_1 + L_{c1} C_1 \omega_1^2 \\ -L_{c1} C_1 \alpha_1 + L_{c1} S_1 \omega_1^2 - g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって、節点 0 (点 B)に必要なトルクは

$$M_0 = M_1 + L_{c1} C_1 m_1 g + L_1 S_1 A_{1x} - L_1 C_1 A_{1y} + (J_1 + m_1 L_{c1}^2) \alpha_1$$

さて、例題を十進 BASIC で解いてみよう。

サンプルプログラム (1) 外積計算をパソコンにやらせる場合

```
! neweul02b.bas 06-2-15
```

```
dim F0(3),F1(3),z1(3),z2(3),z12(3),w1(3),w2(3),w12(3)
dim alpha1(3),alpha2(3),alpha12(3),r10(3),rg10(3),rg21(3)
dim alphaXr10(3),wXr10(3),wXwXr10(3)
dim alphaXrg21(3),wXrg21(3),wXwXrg21(3)
dim a10(3),ag10(3),ag21(3),ag2(3)
```

```
let g=9.8
let z1(3)=pi/12
let z2(3)=pi/6
mat z12=z1+z2
```

```
let w1(3)=0.5
let w2(3)=2
mat w12=w1+w2
let alpha1(3)=0
let alpha2(3)=0
mat alpha12=alpha1+alpha2
```

```
let L1=2
let Lc1=1
let L2=2
let Lc2=1
```

```
let m1=2
let m2=2
```

```
let J1=2
let J2=2
!-----
let c1=cos(z1(3))
let s1=sin(z1(3))
let c12=cos(z12(3))
let s12=sin(z12(3))
!-----
let r10(1)=L1*c1
let r10(2)=L1*s1
let rg21(1)=Lc2*c12
let rg21(2)=Lc2*s12
```

```
mat alphaXr10=cross(alpha1,r10)
mat wXr10=cross(w1,r10)
mat wXwXr10=cross(w1,wXr10)
mat a10=alphaXr10+wXwXr10
!-----
mat alphaXr10=cross(alpha12,rg21)
mat wXrg21=cross(w12,rg21)
mat wXwXrg21=cross(w12,wXrg21)
mat ag21=alphaXrg21+wXwXrg21
mat ag2=a10+ag21
```

```
mat F1=(-m2)*ag2
```

```
let F1(2)=F1(2)-m2*g
```

```
let Torq1=J2*(alpha12(3))+Lc2*s12*F1(1)-Lc2*c12*F1(2)
let Torq0=Torq1+Lc1*c1*m1*g+L1*s1*F1(1)-L1*c1*F1(2)+(J1+m1*Lc1^2)*alpha1(3)
print Torq0; Torq1
```

```
END
```

サンプルプログラム（ 2 ） 外積計算に本文のような式を入れてやる場合

```
!neweul01.bas
```

```
let g=9.8
let z1=pi/12
let z2=pi/6
let z12=z1+z2
let w1=0.5
let w2=2
let w12=w1+w2
let alpha1=0
let alpha2=0
let alpha12=alpha1+alpha2
```

```
let L1=2
let Lc1=1
let L2=2
let Lc2=1
```

```
let m1=2
let m2=2
```

```
let J1=2
let J2=2
```

```
let c1=cos(z1)
let s1=sin(z1)
let c12=cos(z12)
let s12=sin(z12)
```

```
!-----
```

```
let a10x=-L1*s1*alpha1-L1*c1*w1^2
let a10y=L1*c1*alpha1-L1*s1*w1^2
```

```
let ag21x=-Lc2*s12*alpha12-Lc2*c12*w12^2
let ag21y=Lc2*c12*alpha12-Lc2*s12*w12^2
```

```
let ag2x=a10x+ag21x
let ag2y=a10y+ag21y
```

```
let F1x=-m2*ag2x
let F1y=-m2*ag2y-m2*g
let Torq1=J2*alpha12+Lc2*s12*F1x-Lc2*c12*F1y
```

```
let Torq0=Torq1+Lc1*c1*m1*g+L1*s1*F1x-L1*c1*F1y+(J1+m1*Lc1^2)*alpha1
```

```
print Torq0;Torq1
```

```
END
```