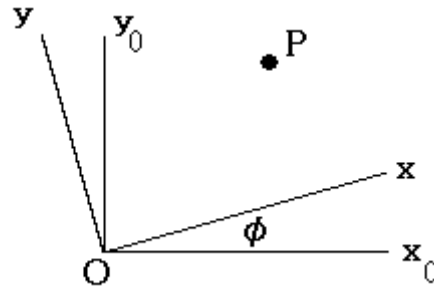


回転座標

例題 2D の回転座標



静止 x_0 - y_0 - z_0 座標の z_0 軸まわりに一定速度 1 rad/s で回転する座標系 x - y - z がある。回転座標系からみて、位置 $\vec{r}_{rel} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ m}$ 、速度 $\vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m/s}$ 、加速度 $\vec{a}_{rel} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix} \text{ m/s}^2$ で動いている点 P の $\phi = 30^\circ$ のときの静止座標から見た位置、速度、加速度を求めよう。

考え方

$$c = \cos \phi, \quad s = \sin \phi \quad \text{とすると} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \vec{r}_{rel} \quad \text{ここで、} \quad \vec{r}_{rel} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{時間で微分すると} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \begin{pmatrix} -s & -c \\ c & -s \end{pmatrix} \vec{r}_{rel} + \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \vec{v}_{rel} \quad \text{ここで、} \quad \vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix}$$

さらに、時間で微分すると

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega^2 \begin{pmatrix} -c & -s \\ -s & -c \end{pmatrix} \vec{r}_{rel} + \omega \begin{pmatrix} -s & -c \\ c & -s \end{pmatrix} \vec{v}_{rel} + \omega \begin{pmatrix} -s & -c \\ c & -s \end{pmatrix} \vec{v}_{rel} + \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \vec{a}_{rel}$$

$$\text{ここで、} \quad \vec{a}_{rel} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{pmatrix}$$

ゆえに、静止座標から見た加速度は

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -c & s \\ -s & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} -s & -c \\ c & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{pmatrix}$$

である。

$$\text{以上から} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 7.99 \\ 16.16 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -14.928 \\ 9.856 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -11.513 \\ -13.46 \end{pmatrix}$$

十進 BASIC で回転行列と回転座標位置の積の微分を数値計算でもとめて点 P の速度を求めてみよう。

かなりな精度で速度が求められていることがわかる。

プリント結果

```

7.99008249042044      16.1604511633053
-14.928374869        9.85620575
-11.5123              -13.459

```

```

!回転座標 02.bas 06-2-26
dim R1(2,2),xrel(2),vrel(2),arel(2),dvrel(2),a(2),Rprev(2,2)
dim Rx(2),dxrel(2),x(2),xprev(2),dx(2),v(2),vprev(2),dv(2)
mat print x
mat print v
mat print a
END

let dt=0.00001
let t1=pi/6
let w1=1

data 15,10
mat read xrel
data 2,1
mat read vrel
data 0.3,0.1
mat read arel

def c(t)=cos(t)
def s(t)=sin(t)

for i=1 to 3
  let R1(1,1)=c(t1)
  let R1(1,2)=-s(t1)
  let R1(2,1)=s(t1)
  let R1(2,2)=c(t1)

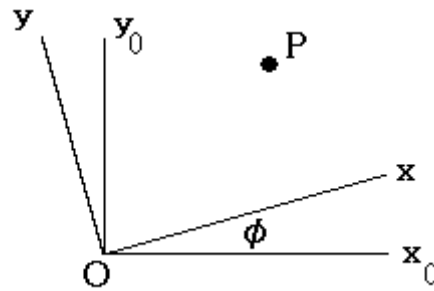
  mat x=R1*xrel

  mat dx=x-xprev
  mat v=(1/dt)*dx
  mat dv=v-vprev
  mat a=(1/dt)*dv

  let t1=t1+w1*dt
  mat dvrel=dt*arel
  mat vrel=vrel+dvrel
  mat dxrel=dt*vrel
  mat xrel=xrel+dxrel
  mat xprev=x
  mat vprev=v
next i
-----

```

2D の回転座標



静止 x_0 - y_0 - z_0 座標の z_0 軸まわりに一定速度 ω rad/s で回転する座標系 x - y - z がある。 回転座標系からみて、点 P の とき、位置 $\vec{r}_{rel} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ m、速度

$\vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix}$ m/s、 加速度 $\vec{a}_{rel} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{pmatrix}$ m/s² で動いている。 絶対加速度 (静止座

標から見た加速度) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{pmatrix}$ を回転する座標系 x - y - z の x - y 成分であらわそう。

考え方

前の問題から絶対加速度は

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -c & s \\ -s & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} -s & -c \\ c & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{pmatrix}$$

回転系の座標に座標変換すると

$$\vec{a}_{xy1} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{pmatrix}$$

ゆえに、

$$a_{x1} = \ddot{x}_1 - 2\omega \cdot \dot{y}_1 - \omega^2 x_1$$

$$a_{y1} = \ddot{y}_1 + 2\omega \cdot \dot{x}_1 - \omega^2 y_1$$

思い出す公式「積の微分」

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$