

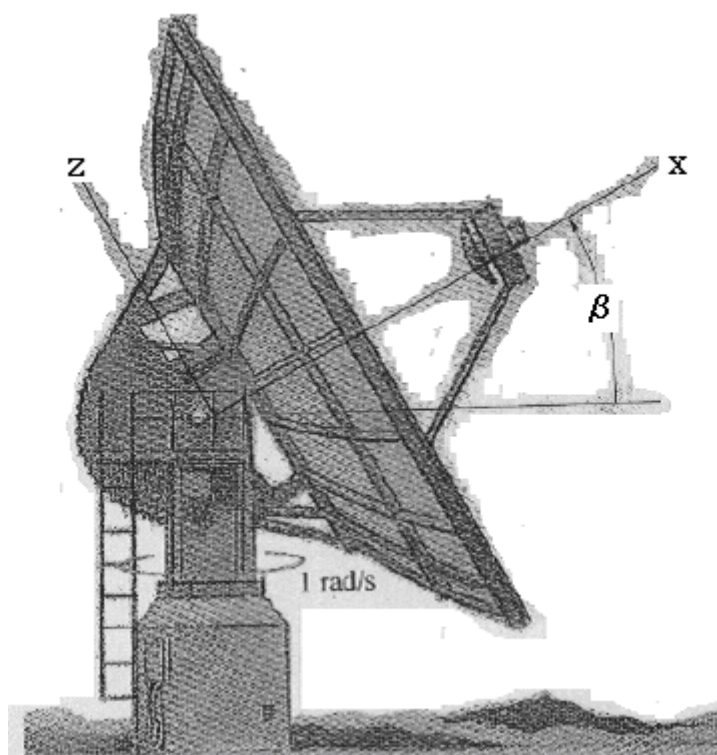
ヤコビアン (2)

オイラー角 $\begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}$ による回転速度 $\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$ と角速度ベクトル $\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ の関係

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

例題



アンテナのベースが上から見て反時計方向に 1 rad/s で回転している。アンテナは $\phi = 30^\circ$ で上方向に $20^\circ/s$ で移動している。

(1) 静止座標から見た場合のアンテナの角速度ベクトル $\vec{\omega}$ を求めよ。

(2) アンテナに固定した座標における点(2,-2,2) m の速度を求めよ。

(解法)
$$\begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi/6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rad} \quad \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -20\pi/180 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rad/s} \text{ を代入する。}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0.866 \end{pmatrix}$$

(1)

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0.866 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi/9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.349 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ rad/s}$$

なお、アンテナの座標系での点の静止座標での位置は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

を使って、

$$R = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} := R \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.732 \\ -2 \\ 2.732 \end{bmatrix}$$

(2) 点の速度は

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.349 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.732 \\ -2 \\ 2.732 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.046 \\ 0.732 \\ 0.256 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

十進 BASIC で回転行列の微分を数値計算でもとめて点 P の速度を求めてみよう。
かなりな精度で速度が求められていることがわかる。

プリント結果

```

- .174533411          - .9999999999999833      - .302299613
.866025229251316    - .0000005              - .500000302299779
.302299863          0                          - .174532978

1.04633395199967    .732050853903074        .25553377

!jacob03.bas 06-2-26
dim R1(3,3),R2(3,3),R3(3,3),R23(3,3),R(3,3),Rprev(3,3)
dim dR(3,3),J(3,3),x(3),Jx(3)
let dt=0.000001
let t1=0
let t2=-pi/6
let t3=0
let w1=1
let w2=-pi/9
let w3=0

def c(t)=cos(t)
def s(t)=sin(t)

for i=1 to 2
  let R1(1,1)=c(t1)
  let R1(1,2)=-s(t1)
  let R1(2,1)=s(t1)
  let R1(2,2)=c(t1)
  let R1(3,3)=1

  let R2(1,1)=c(t2)
  let R2(1,3)=s(t2)
  let R2(2,2)=1
  let R2(3,1)=-s(t2)
  let R2(3,3)=c(t2)

  let R3(1,1)=c(t3)
  let R3(1,2)=-s(t3)
  let R3(2,1)=s(t3)
  let R3(2,2)=c(t3)
  let R3(3,3)=1

  mat R23=R2*R3
  mat R=R1*R23

  mat dR=R-Rprev
  mat Rprev=R

  let t1=t1+w1*dt
  let t2=t2+w2*dt
  let t3=t3+w3*dt

next i

mat J=(1/dt)*dR
mat print J

data 2,-2,2
mat read x
mat Jx=J*x
mat print Jx
END

```

