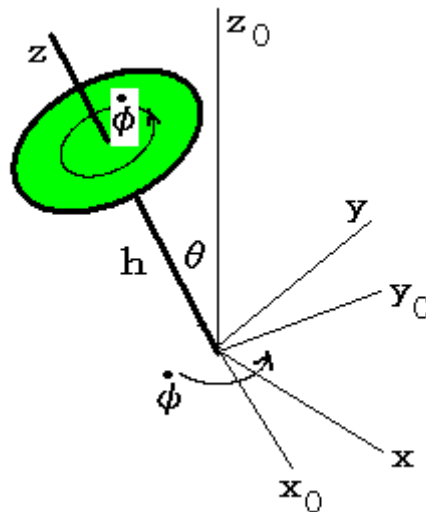


こま



こまが公転と自転をしている。こまの軸を  $z$  軸とする回転座標  $x$ - $y$ - $z$  をとり、絶対垂直軸  $z_0$  のまわりに回転するものとする。角度を図のように  $z$ - $x$ - $z$  の順にオイラー角  $\psi$ 、 $\theta$ 、 $\phi$  でとる。

- (1) 座標  $x$ - $y$ - $z$  軸の単位ベクトル  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  を求めよ。
- (2) 単位ベクトル  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  の時間での微分を求めよ。ただし、 $\dot{\psi}$  は一定とする。
- (3)  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  と  $\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z}$  との関係をもとめよ。
- (4)  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  と  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  との関係をもとめよ。
- (5) 単位ベクトル  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  の時間での微分を求めよ。

-----

(1)  $R_1 = \begin{pmatrix} c1 & -s1 & 0 \\ s1 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & -s2 \\ 0 & s2 & c2 \end{pmatrix}$  とすると座標  $x$ - $y$ - $z$  軸のベク

トルは姿勢変換行列の各列であらわされる。

$$R = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} c1 & -s1 & 0 \\ s1 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & -s2 \\ 0 & s2 & c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 & -s1 \cdot c2 & s1 \cdot s2 \\ s1 & c1 \cdot c2 & -c1 \cdot s2 \\ 0 & s2 & c2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆゑに } \hat{i} = \begin{pmatrix} c1 \\ s1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{j} = \begin{pmatrix} -s1 \cdot c2 \\ c1 \cdot c2 \\ s2 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} s1 \cdot s2 \\ -c1 \cdot s2 \\ c2 \end{pmatrix}$$

( 2 )

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \begin{pmatrix} -s1 \cdot \dot{\psi} \\ c1 \cdot \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c1 \\ s1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \hat{i}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \begin{pmatrix} -c1 \cdot c2 \cdot \dot{\psi} \\ -s1 \cdot c2 \cdot \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -s1 \cdot c2 \\ c1 \cdot c2 \\ s2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \hat{j}$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \begin{pmatrix} c1 \cdot s2 \cdot \dot{\psi} \\ s1 \cdot s2 \cdot \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s1 \cdot s2 \\ -c1 \cdot s2 \\ c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \hat{k}$$

( 3 )

$$\begin{pmatrix} \omega_{0x} \\ \omega_{0y} \\ \omega_{0z} \end{pmatrix} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} c1 \\ s1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\phi} \begin{pmatrix} s1 \cdot s2 \\ -c1 \cdot s2 \\ c2 \end{pmatrix}$$

( 4 )

$$\begin{pmatrix} \omega_{0x} \\ \omega_{0y} \\ \omega_{0z} \end{pmatrix} = R_1 R_2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \text{ゆゑに} \quad \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = (R_1 R_2)^{-1} \begin{pmatrix} \omega_{0x} \\ \omega_{0y} \\ \omega_{0z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 & s1 & 0 \\ -s1 \cdot c2 & c1 \cdot c2 & s2 \\ s1 \cdot s2 & -c1 \cdot s2 & c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{0x} \\ \omega_{0y} \\ \omega_{0z} \end{pmatrix} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ s2 \\ c2 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

結局

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cdot s2 \\ \dot{\psi} \cdot c2 + \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

( 5 ) 回転座標の角速度は

$$\begin{pmatrix} \Omega_{0x} \\ \Omega_{0y} \\ \Omega_{0z} \end{pmatrix} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} c1 \\ s1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 \cdot \dot{\theta} \\ s1 \cdot \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$\text{また } \hat{i} = \begin{pmatrix} c1 \\ s1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{j} = \begin{pmatrix} -s1 \cdot c2 \\ c1 \cdot c2 \\ s2 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} s1 \cdot s2 \\ -c1 \cdot s2 \\ c2 \end{pmatrix}$$

各単位ベクトルを時間で微分すると

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \begin{pmatrix} -s1 \cdot \dot{\psi} \\ c1 \cdot \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 \cdot \dot{\theta} \\ s1 \cdot \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c1 \\ s1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{\Omega}_0 \times \hat{i}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \begin{pmatrix} -c1 \cdot c2 \cdot \dot{\psi} + s1 \cdot s2 \cdot \dot{\theta} \\ -s1 \cdot c2 \cdot \dot{\psi} - c1 \cdot s2 \cdot \dot{\theta} \\ c2 \cdot \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 \cdot \dot{\theta} \\ s1 \cdot \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -s1 \cdot c2 \\ c1 \cdot c2 \\ s2 \end{pmatrix} = \bar{\Omega}_0 \times \hat{j}$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \begin{pmatrix} c1 \cdot s2 \cdot \dot{\psi} + s1 \cdot c2 \cdot \dot{\theta} \\ s1 \cdot s2 \cdot \dot{\psi} - c1 \cdot c2 \cdot \dot{\theta} \\ -s2 \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 \cdot \dot{\theta} \\ s1 \cdot \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s1 \cdot s2 \\ -c1 \cdot s2 \\ c2 \end{pmatrix} = \bar{\Omega}_0 \times \hat{k}$$

\*\*\*\*\*

回転座標 x-y-z を基準にとれば

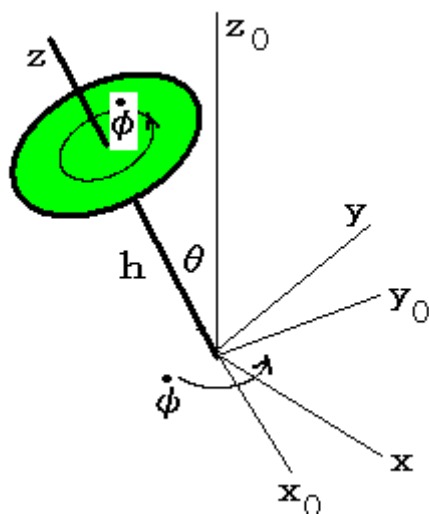
$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{で}$$

$$\text{また } \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & s2 \\ 0 & -s2 & c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{0x} \\ \Omega_{0y} \\ \Omega_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ s2 \cdot \dot{\psi} \\ c2 \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{となり、}$$

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \bar{\Omega} \times \hat{i}, \quad \frac{d\hat{j}}{dt} = \bar{\Omega} \times \hat{j}, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = \bar{\Omega} \times \hat{k}$$

\*\*\*\*\*

## こまの例 1



こまが公転と自転をしている。こまの軸を  $z$  軸とする回転座標  $x$ - $y$ - $z$  をとり、絶対垂直軸  $z_0$  のまわりに等速回転するものとする。角度を図のように  $z$ - $x$ - $z$  の順にオイラー角  $\psi$ 、 $\theta$ 、 $\phi$  でとる。 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\phi}$  を一定と仮定する。

- (1) こまの  $\dot{\theta}_1 = 0$ 、 $\dot{\theta}_3 = 0$  のときの絶対角速度を求めよ。
- (2) こまの  $\dot{\theta}_{01} = 0$ 、 $\dot{\theta}_{03} = 0$  のときの回転座標での角速度をもとめよ。
- (3) こまの  $\dot{\theta}_{01} = 0$ 、 $\dot{\theta}_{03} = 0$  のときの回転座標での角加速度をもとめよ。

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad R_1 = \begin{pmatrix} c1 & -s1 & 0 \\ s1 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & -s2 \\ 0 & s2 & c2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$R'_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_1 \quad .$$

- (1) こまの  $\dot{\theta}_1 = 0$ 、 $\dot{\theta}_3 = 0$  のときの絶対角速度は

$$\vec{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + R_1 R_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & -s2 \\ 0 & s2 & c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\phi} \cdot s2 \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cdot c2 \end{pmatrix}$$

(2) こまの  $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_3 = 0$  のときの回転座標での角速度は

$$\vec{\omega} = (R_1 R_2)^{-1} \vec{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & s2 \\ 0 & -s2 & c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\phi} \cdot s2 \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cdot c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \cdot s2 \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot c2 \end{pmatrix}$$

(3) こまの  $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_3 = 0$  のときの回転座標での角加速度をもとめる。

$$\vec{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + R_1 R_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

を時間で微分するが、 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\phi}$  は一定だから

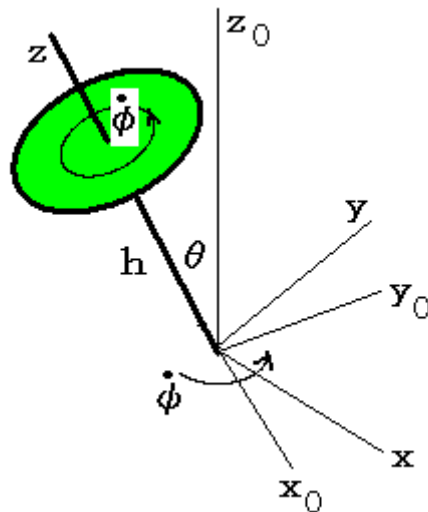
$$\vec{\alpha}_0 = \vec{\omega}_0' = R_1' R_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & -s2 \\ 0 & s2 & c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot s2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

回転座標から見た回転角加速度ベクトルに変換する。

$$\vec{\alpha} = (R_1 R_2)^{-1} \vec{\alpha}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & s2 \\ 0 & -s2 & c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot s2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot s2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

こまの加速度 静止座標の成分と回転座標の成分



こまの絶対角速度は下のごとくである。

$$\bar{\omega}_0 = \dot{\theta} \cdot \hat{i} + s2 \cdot \dot{\psi} \cdot \hat{j} + (c2 \cdot \dot{\psi} + \dot{\phi}) \hat{k}$$

$$\bar{\Omega}_0 = \dot{\theta} \cdot \hat{i} + s2 \cdot \dot{\psi} \cdot \hat{j} + c2 \cdot \dot{\psi} \cdot \hat{k}$$

$$\text{ここで } \hat{i} = \begin{pmatrix} c1 \\ s1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{j} = \begin{pmatrix} -s1 \cdot c2 \\ c1 \cdot c2 \\ s2 \end{pmatrix}, \hat{k} = \begin{pmatrix} s1 \cdot s2 \\ -c1 \cdot s2 \\ c2 \end{pmatrix}$$

$$\text{また、 } R_1 = \begin{pmatrix} c1 & -s1 & 0 \\ s1 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & -s2 \\ 0 & s2 & c2 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$\bar{\omega}_0 = (R_1 R_2) \bar{\omega}$$

回転座標は瞬間瞬間における座標で、ある瞬間をとらえると  $c1 = 0, s1 = 0$  となるが時間で微分するときは、これらは  $c1, s1$  として微分される。したがって、 $R_1$  は時間で微分されるときは  $c1, s1$  からなる行列であるが、姿勢転換行列としては単位行列である。

$$\text{また } \bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ s2 \cdot \dot{\psi} \\ \dot{\phi} + c2 \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{で } \bar{\omega}_0 = \begin{pmatrix} \omega_{0x} \\ \omega_{0y} \\ \omega_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -s2 \cdot \dot{\phi} \\ c2 \cdot \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

以上から、角加速度を論ずるときは

$$\bar{\omega}'_0 = R_1 R_2 \bar{\omega}' + R_1' R_2 \bar{\omega} + R_1 R_2' \bar{\omega}$$

かきなおすと、

$$\bar{\omega}'_0 = R_1 R_2 \bar{\omega}' + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_1 R_2 \bar{\omega} + R_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix} R_2 \bar{\omega}$$

上の式で R1 は時間で微分しない場合は単位行列だから

$$\bar{\omega}'_0 = R_2 \bar{\omega}' + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix} R_2 \bar{\omega} = R_2 \bar{\omega}' + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times (R_2 \bar{\omega})$$

ここで

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ s2 \cdot \dot{\psi} \\ \dot{\phi} + c2 \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$R_2 \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & -s2 \\ 0 & s2 & c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -s2 \cdot \dot{\phi} \\ c2 \cdot \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} = \bar{\omega}_0$$

また、瞬間において、微分をしないかぎり  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  に  $c1 = 1, s1 = 0$  を代入できるので

$$\bar{\Omega}_0 = \dot{\theta} \cdot \hat{i} + s2 \cdot \dot{\psi} \cdot \hat{j} + c2 \cdot \dot{\psi} \cdot \hat{k} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{で} \quad \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ s2 \cdot \dot{\psi} \\ c2 \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

以上から静止座標での成分で論ずるかぎりでは、

$$\bar{\omega}'_0 = R_2 \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \bar{\Omega}_0 \times \bar{\omega}_0$$

の公式がなりたつ。

回転座標の成分というかたちで角加速度を論ずるときは  $c1 = 1, s1 = 0$  の瞬間に

$$\bar{\omega} = R_2^{-1} \bar{\omega}_0 \quad \text{かつ} \quad R_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & s2 \\ 0 & -s2 & c2 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + R_2^{-1} (\bar{\Omega}_0 \times \bar{\omega}_0)$$

ここで

$$R_2^{-1} (\bar{\Omega}_0 \times \bar{\omega}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & s2 \\ 0 & -s2 & c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -s2 \cdot \dot{\phi} \\ c2 \cdot \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s2 \cdot \dot{\phi} \dot{\psi} \\ -c2 \cdot \dot{\phi} \dot{\theta} \\ -s2 \cdot \dot{\phi} \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

また

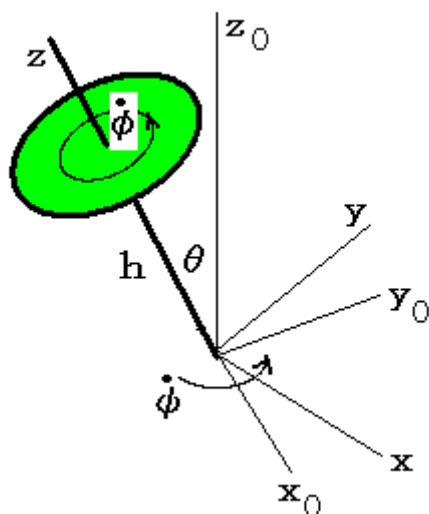
$$\bar{\Omega} \times \bar{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ s2 \cdot \dot{\psi} \\ c2 \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ s2 \cdot \dot{\psi} \\ c2 \cdot \dot{\psi} + \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s2 \cdot \dot{\phi} \dot{\psi} \\ -c2 \cdot \dot{\phi} \dot{\theta} \\ -s2 \cdot \dot{\phi} \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

したがって  $R_2^{-1} (\bar{\Omega}_0 \times \bar{\omega}_0) = \bar{\Omega} \times \bar{\omega}$  となり、こまにたいして回転座標の成分として以下が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$



## こまの角運動量とオイラーの公式



回転座標の角速度とこまの角（加）速度の回転座標の成分は

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ s2 \cdot \dot{\psi} \\ c2 \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ s2 \cdot \dot{\psi} \\ \dot{\phi} + c2 \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ s2 \cdot \ddot{\psi} + c2 \cdot \dot{\psi} \dot{\theta} \\ \ddot{\phi} + c2 \cdot \ddot{\psi} - s2 \cdot \dot{\psi} \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

角運動量は

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

オイラーの公式は

$$\Sigma \vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

かきなおすと

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} \dot{\omega}_x - \Omega_z I_{yy} \omega_y + \Omega_y I_{zz} \omega_z \\ I_{yy} \dot{\omega}_y + \Omega_z I_{xx} \omega_x - \Omega_x I_{zz} \omega_z \\ I_{zz} \dot{\omega}_z - \Omega_y I_{xx} \omega_x + \Omega_x I_{yy} \omega_y \end{pmatrix}$$

以上から  $I_{yy} = I_{xx}$  を考慮すると

$$\Sigma M_x = I_{xx}\ddot{\theta} + (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2 c_2 s_2 + I_{zz}\dot{\psi}\dot{\phi} \cdot s_2$$

$$\Sigma M_y = I_{xx}(\ddot{\psi} \cdot s_2 + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cdot s_2) - I_{zz}(\dot{\theta}\dot{\phi} + \dot{\psi}\dot{\phi} \cdot c_2)$$

$$\Sigma M_z = I_{zz}(\ddot{\phi} + \dot{\psi} \cdot c_2 - \dot{\psi}\dot{\theta} \cdot s_2)$$