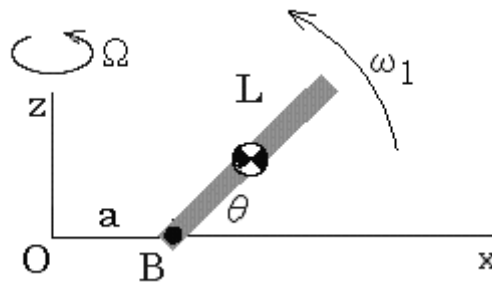


力とモーメント (7)



回転床が角速度 $\Omega = 1\text{rad/s}$ で回転している。アーム L は回転床に点 B を支点として図のように角速度 $\omega_1 = 2\text{rad/s}$ で回転する。 $a = 0.7\text{m}$ とする。現時点での仰角は $\theta = 40^\circ$ である。

アーム L の質量は $m = 12\text{kg}$ 、点 B から重心までの距離は $LG = 0.3\text{m}$ 、軸方向に x 軸を取った場合、慣性モーメントは $I_{xx} = 0.03$ 、 $I_{yy} = 4$ 、 $I_{zz} = 4$ 、 $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$ とする。アーム L の端点 B が回転床から受ける力とモーメントを求めたい。

解法

まず、重心 (点 A とする) の加速度を求める。 公式は

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

ここで、まず

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で、 $c1 = \cos 40^\circ$ 、 $s1 = \sin 40^\circ$ とおく。

$$\vec{a}_B = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -0.7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha} = \Omega \times \omega = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} + \vec{\omega}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

また、

$$\vec{r}_{A/B} = \begin{pmatrix} 0.3c_1 \\ 0 \\ 0.3s_1 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.3c_1 \\ 0 \\ 0.3s_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1.149 \\ -0.386 \\ -0.771 \end{pmatrix}$$

から、

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) = \begin{pmatrix} -1.849 \\ -0.771 \\ -0.771 \end{pmatrix}$$

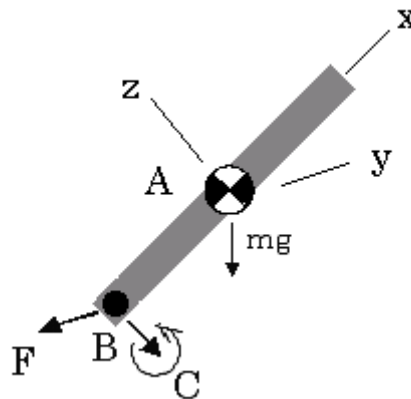
となる。 ニュートンの第2法則から

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} - mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = m\vec{a}_G$$

したがって、回転床からアーム L が受ける力は静止座標からみた場合

$$\vec{F} = m\vec{a}_G + mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22.189 \\ -9.256 \\ 108.464 \end{pmatrix} \quad \text{N}$$

つぎにモーメントを求めるが、この際、回転座標軸を下図のようにとる。



この場合の座標から見た力は

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 \end{pmatrix} \vec{F} = \begin{pmatrix} 52.722 \\ -9.256 \\ 7.351 \end{pmatrix} \quad \text{N}$$

となる。

また、角速度、角加速度は新しい座標系では

$$\vec{\Omega} = 1 \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0.643 \\ -2 \\ 0.766 \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1.532 \\ 0 \\ -1.286 \end{pmatrix}$$

つぎに、平行軸の定理を用いて、重心（点 A）まわりの慣性モーメントと慣性積を求める。

$$I_{xx} = 0.03 \quad , \quad I_{yy} = 4 - 0.3^2 m = 2.92 \quad , \quad I_{zz} = 4 - 0.3^2 m = 2.92$$

$$I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$$

偶力 \vec{C} と力 \vec{F} によって質点 A が受ける全モーメントは、

$$\Sigma \vec{M} = \vec{C} + (-\vec{r}_{A/B}) \times \vec{F}_1 = I \vec{\alpha} + \vec{\omega} \times (I \vec{\omega})$$

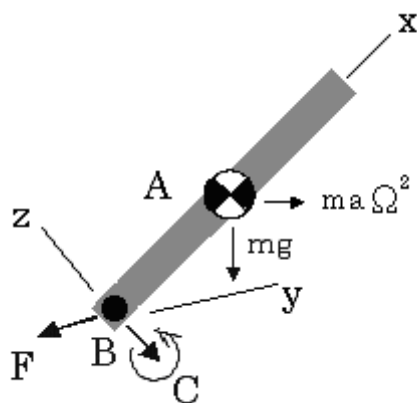
$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 2.92 & 0 \\ 0 & 0 & 2.92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.532 \\ 0 \\ -1.286 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.643 \\ -2 \\ 0.766 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 2.92 & 0 \\ 0 & 0 & 2.92 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.643 \\ -2 \\ 0.766 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0.046 \\ -1.423 \\ -7.469 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{C} = \Sigma M + \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0.0046 \\ -1.423 \\ -7.459 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 52.722 \\ -9.256 \\ 97.351 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.046 \\ -30.628 \\ -10.246 \end{pmatrix} \text{ Nm}$$

モーメントの別の求め方

回転座標の原点を点 B におくと、慣性モーメントおよび慣性積 $I_{xx} = 0.03$ 、 $I_{yy} = 4$ 、 $I_{zz} = 4$ 、 $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$ がそのまま使用できる。ただし、回転軸から回転座標原点が距離 $a = 0.7\text{m}$ だけ移動するので、見かけ上の加速度 a^2 が水平方向に加わることを計算に入れる必要がある。



$$\Sigma \vec{M} = \vec{C} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3g \cos \theta + 0.3 \cdot 0.7\Omega^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = I\vec{\alpha} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega})$$

$$= \begin{pmatrix} 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.532 \\ 0 \\ -1.286 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.643 \\ -2 \\ 0.766 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.643 \\ -2 \\ 0.766 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.046 \\ -1.955 \\ -10.246 \end{pmatrix}$$

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 0.0046 \\ -1.955 \\ -10.246 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -28.673 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.046 \\ -30.628 \\ -10.246 \end{pmatrix}$$