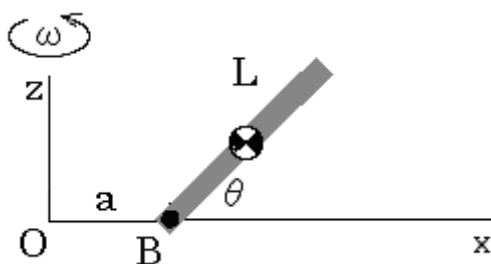


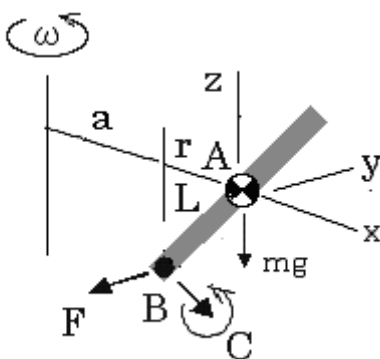
力とモーメント (6)



回転床が角速度  $\omega$  で回転している。アーム L は回転床に点 B に固定されている。アーム L の質量は  $m$  とする。アーム L の端点 B が回転床から受ける力とモーメントを求めたい。

解法 1

物体とともに動く座標原点を質量中心点 A にとる。



点 A の加速度は  $\vec{a} = -\omega^2(a+r)\cdot\hat{i}$  で、ニュートンの第 2 法則から

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} - mg \cdot \hat{k} = -m\omega^2(a+r)\cdot\hat{i}$$

ただし、 $r = \frac{1}{2}L\cos\theta$  とする。

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{F} = -m\omega^2(a+r)\cdot\hat{i} + mg\cdot\hat{k}$$

偶力  $\vec{C}$  と力  $\vec{F}$  によって質点 A が受ける全モーメントは、 $h = \frac{1}{2}L\sin\theta$  とすると

$$\Sigma \vec{M} = \vec{C} + (-r\cdot\hat{i} - h\cdot\hat{k}) \times (-m\omega^2(a+r)\cdot\hat{i} + mg\cdot\hat{k})$$

$$= C_x \hat{i} + (C_y + m\omega^2(a+r)h + mgr) \hat{j} + C_z \hat{k}$$

$c_2 = \cos \theta$ 、 $s_2 = \sin \theta$  とおく。この座標系における慣性モーメントと慣性積は

$$I_{xx} = \frac{1}{12} mL^2 s_2^2 \quad , \quad I_{yy} = \frac{1}{12} mL^2 \quad , \quad I_{zz} = \frac{1}{12} mL^2 c_2^2$$

$$I_{yz} = 0 \quad , \quad I_{zx} = \frac{1}{12} mL^2 s_2 c_2 \quad , \quad I_{xy} = 0$$

この結果を回転運動の方程式に代入すると

$$[I] = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} mL^2 s_2^2 & 0 & -\frac{1}{12} mL^2 s_2 c_2 \\ 0 & \frac{1}{12} mL^2 & 0 \\ -\frac{1}{12} mL^2 s_2 c_2 & 0 & \frac{1}{12} mL^2 c_2^2 \end{pmatrix}$$

で、回転運動の方程式は、

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y + m\omega^2(a+r)h + mgr \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{12} mL^2 s_2^2 & 0 & -\frac{1}{12} mL^2 s_2 c_2 \\ 0 & \frac{1}{12} mL^2 & 0 \\ -\frac{1}{12} mL^2 s_2 c_2 & 0 & \frac{1}{12} mL^2 c_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} m\omega^2 L^2 s_2 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

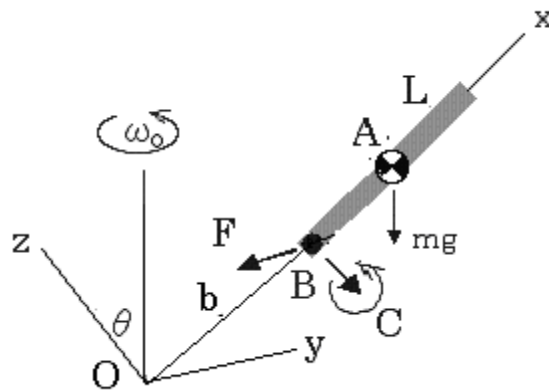
で、アームの回転床より受けるモーメントは

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} m\omega^2 L^2 s_2 c_2 - m\omega^2(a+r)h - mgr \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} m\omega^2 L^2 s_2 c_2 - \frac{1}{4} m\omega^2 L^2 c_2 s_2 - m\omega^2 a \frac{L}{2} s_2 - \frac{1}{2} mgL c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} m\omega^2 L^2 c_2 s_2 - \frac{1}{2} m\omega^2 a L s_2 - \frac{1}{2} mgL \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

解法 2



図のように回転座標系をとる。  $c_2 = \cos\theta$ 、  $s_2 = \sin\theta$  とおく。 回転座標系で角速度をあらわすと

$$\vec{\omega} = \omega_0 s_2 \cdot \hat{i} + \omega_0 c_2 \cdot \hat{k}$$

点 A の加速度は  $L_G = \frac{1}{2}L$  とすると

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{b} + \vec{L}_G)) = \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b + L_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (b + L_G)\omega_0^2 c_2^2 \\ 0 \\ (b + L_G)\omega_0^2 c_2 s_2 \end{pmatrix}$$

で、ニュートンの第 2 法則から

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} - mg \cdot \begin{pmatrix} -s_2 \\ 0 \\ -c_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} (b + L_G)\omega_0^2 c_2^2 \\ 0 \\ (b + L_G)\omega_0^2 c_2 s_2 \end{pmatrix}$$

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{F} = m \begin{pmatrix} (b + L_G)\omega_0^2 c_2^2 + g s_2 \\ 0 \\ (b + L)\omega_0^2 c_2 s_2 + g c_2 \end{pmatrix}$$

回転床の固定点 O を原点として回転座標を図のようにさだめる。 点 O まわりの全モーメントは

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{M} &= \vec{C} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m(b+L_G)\omega_0^2 c_2^2 + mgs_2 \\ 0 \\ m(b+L_G)\omega_0^2 c_2 s_2 + mgc_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ mg(b+L_G)c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \vec{C} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mb(b+L_G)\omega_0^2 c_2 s_2 + mgL_G c_2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

つぎに、平行軸の定理を用いて、点 O (点 B)まわりの慣性モーメントと慣性積を求める。

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m = 0$$

$$I_{yy} = I_{y'y'} + (d_z^2 + d_x^2)m = \frac{1}{12}mL^2 + m(b+L_G)^2$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m = \frac{1}{12}mL^2 + m(b+L_G)^2$$

$$I_{yz} = I_{y'z'} + d_y d_z m = 0$$

$$I_{zx} = I_{z'x'} + d_z d_x m = 0$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y m = 0$$

この結果を回転運動の方程式に代入すると

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} C_x \\ C_y - mb(b+L_G)\omega_0^2 c_2 s_2 + mgL_G c_2 \\ C_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 + m(b+L_G)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 + m(b+L_G)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12}m\omega_0^2 L^2 c_2 s_2 - m\omega_0^2 (b+L_G)^2 c_2 s_2 + mb(b+L_G)\omega_0^2 c_2 s_2 - mgL_G c_2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12}m\omega_0^2 L^2 c_2 s_2 - \frac{1}{4}m\omega_0^2 L^2 c_2 s_2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 aLc_2 s_2 - mgL_G c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$