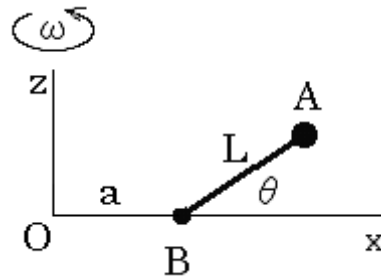


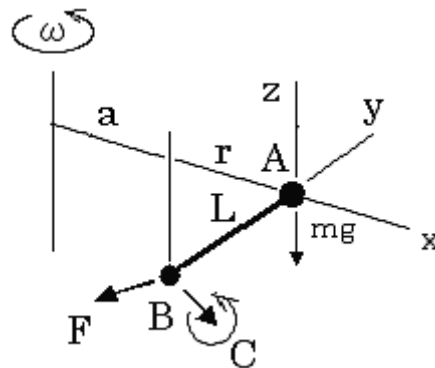
力とモーメント ( 5 )



回転床が角速度  $\omega$  で回転している。アーム L は回転床に点 B に固定されている。アーム L の質量は無視できるものとする。アーム先端の点 A に質量  $m$  が集中しているものとする。アーム L の端点 B が回転床から受ける力とモーメントを求めたい。

解法 1

物体とともに動く座標原点を質量中心点 A にとる。



点 A の加速度は  $\vec{a} = -\omega^2 r \cdot \hat{i}$  で、ニュートンの第 2 法則から

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} - mg \cdot \hat{k} = -m\omega^2 (a+r) \cdot \hat{i}$$

ただし、 $r = L \cos \theta$  とする。

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{F} = -m\omega^2 (a+r) \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k}$$

偶力  $\vec{C}$  と力  $\vec{F}$  によって質点 A が受ける全モーメントは、 $h = L \sin \theta$  とすると

$$\Sigma \vec{M} = \vec{C} + (-r \cdot \hat{i} - h \cdot \hat{k}) \times (-m\omega^2 (a+r) \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k})$$

$$= C_x \hat{i} + (C_y + m\omega^2(a+r)h + mgr) \hat{j} + C_z \hat{k}$$

そしてこの座標系においては

$$[I] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

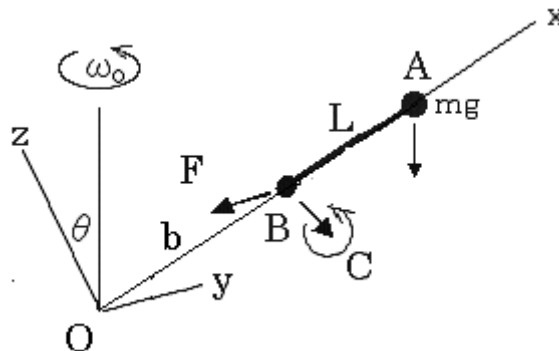
で、その角速度は  $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{k}$  だから、回転運動の方程式は

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y + m\omega^2(a+r)h + mgr \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

で、右辺は0となるから、アームの回転床より受けるモーメントは

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\omega^2(a + L\cos\theta)L\sin\theta - mgL\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

解法 2



図のように回転座標系をとる。  $c_2 = \cos\theta$ 、  $s_2 = \sin\theta$  とおく。 回転座標系で角速度をあらわすと

$$\vec{\omega} = \omega_0 s_2 \cdot \hat{i} + \omega_0 c_2 \hat{k}$$

$b = a / \cos\theta = a / c_2$  とおくと、点 A の加速度は

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{L}) = \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b+L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (b+L)\omega_0^2 c_2^2 \\ 0 \\ (b+L)\omega_0^2 c_2 s_2 \end{pmatrix}$$

で、ニュートンの第2法則から

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} - mg \cdot \begin{pmatrix} s_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} (b+L)\omega_0^2 c_2^2 \\ 0 \\ (b+L)\omega_0^2 c_2 s_2 \end{pmatrix}$$

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{F} = m \begin{pmatrix} (b+L)\omega_0^2 c_2^2 + gs_2 \\ 0 \\ (b+L)\omega_0^2 c_2 s_2 + gc_2 \end{pmatrix}$$

回転床の固定点 O を原点として回転座標を図のようにさだめる。点 O まわりの全モーメントは

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{M} &= \vec{C} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m(b+L)\omega_0^2 c_2^2 + mgs_2 \\ 0 \\ m(b+L)\omega_0^2 c_2 s_2 + mgc_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ mg(b+L)c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \vec{C} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mb(b+L)\omega_0^2 c_2 s_2 + mgLc_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

つぎに、平行軸の定理を用いて、点 O まわりの慣性モーメントと慣性積を求め

る。

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m = 0$$

$$I_{yy} = I_{y'y'} + (d_z^2 + d_x^2)m = m(b+L)^2$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m = m(b+L)^2$$

$$I_{yz} = I_{y'z'} + d_y d_z m = 0$$

$$I_{zx} = I_{z'x'} + d_z d_x m = 0$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y m = 0$$

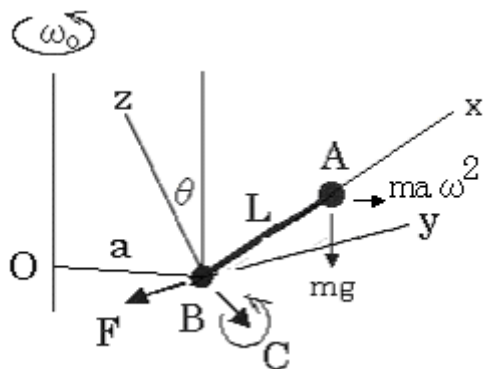
この結果を回転運動の方程式に代入すると

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y - mb(b+L)\omega_0^2 c_2 s_2 + mgLc_2 \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m(b+L)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(b+L)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\omega_0^2 (b+L)^2 c_2 s_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\omega_0^2 L^2 c_2 s_2 - m\omega_0^2 bLc_2 s_2 - mgLc_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解法 3



図のように回転座標系をとる。回転床からアーム L が受ける力は解法 1、解法 2 とおなじであるので省略する。

回転座標の原点を x 方向に a 移動させたために重心には見かけの加速度が加わり、点 B まわりの全モーメントは、

$$\Sigma \vec{M} = \vec{C} + \begin{pmatrix} 0 \\ mgL \cos \theta + ma\omega_0^2 L \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

点 B まわりの慣性モーメントと慣性積を求める。

$$I_{xx} = 0 \quad , \quad I_{yy} = mL^2 \quad , \quad I_{zz} = mL^2 \quad , \quad I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$$

この結果を回転運動の方程式に代入すると

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y + mgL \cos \theta + ma\omega_0^2 L \sin \theta \\ C_z \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \omega_0 \sin \theta \\ 0 \\ \omega_0 \cos \theta \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \sin \theta \\ 0 \\ \omega_0 \cos \theta \end{pmatrix} \right) \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\omega_0^2 L^2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\omega_0^2 L^2 \cos \theta \sin \theta - m\omega_0^2 aL \sin \theta - mgL \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$