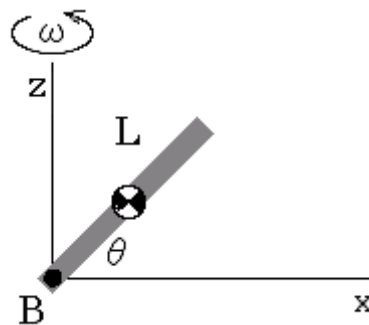


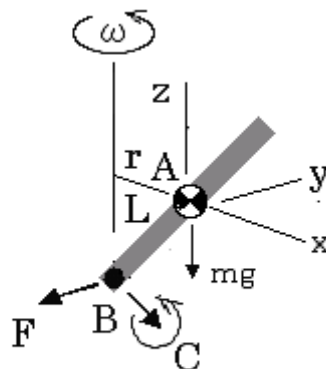
力とモーメント (4)



回転床が角速度 ω で回転している。アーム L は回転床に点 B (原点) に固定されている。アーム L の質量は m とする。アーム L の端点 B が回転床から受ける力とモーメントを求めたい。

解法 1

物体とともに動く座標原点を質量中心点 A にとる。



点 A の加速度は $\vec{a} = -\omega^2 r \cdot \hat{i}$ で、ニュートンの第 2 法則から

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} - mg \cdot \hat{k} = -m\omega^2 r \cdot \hat{i}$$

ただし、 $r = \frac{1}{2}L \cos \theta$ とする。

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{F} = -m\omega^2 r \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k}$$

偶力 \vec{C} と力 \vec{F} によって質点 A が受ける全モーメントは、 $h = \frac{1}{2}L \sin \theta$ とすると

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{M} &= \vec{C} + (-r \cdot \hat{i} - h \cdot \hat{k}) \times (-m\omega^2 r \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k}) \\ &= C_x \hat{i} + (C_y + m\omega^2 rh + mgr) \hat{j} + C_z \hat{k}\end{aligned}$$

つぎに、平行軸の定理を用いて、この座標系における慣性モーメントと慣性積を求める。

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \frac{1}{12} mL^2 \sin^2 \theta \quad , \quad I_{yy} = \frac{1}{12} mL^2 \quad , \quad I_{zz} = \frac{1}{12} mL^2 \cos^2 \theta \\ I_{yz} &= 0 \quad , \quad I_{zx} = \frac{1}{12} mL^2 \sin \theta \cos \theta \quad , \quad I_{xy} = 0\end{aligned}$$

この結果を回転運動の方程式に代入すると

$$[I] = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} mL^2 \sin^2 \theta & 0 & -\frac{1}{12} mL^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \frac{1}{12} mL^2 & 0 \\ -\frac{1}{12} mL^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \frac{1}{12} mL^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

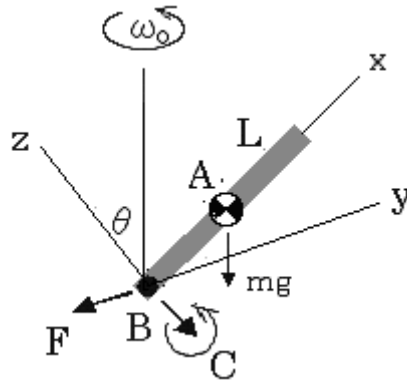
で、回転運動の方程式は、 $\sin \theta = s_2$ 、 $\cos \theta = c_2$ とおくと

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} C_x \\ C_y + m\omega^2 rh + mgr \\ C_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{12} mL^2 s_2^2 & 0 & -\frac{1}{12} mL^2 s_2 c_2 \\ 0 & \frac{1}{12} mL^2 & 0 \\ -\frac{1}{12} mL^2 s_2 c_2 & 0 & \frac{1}{12} mL^2 c_2^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} m\omega^2 L^2 s_2 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

で、アームの回転床より受けるモーメントは

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} m\omega^2 L^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{4} m\omega^2 L^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{1}{2} mgL \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} m\omega^2 L^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{1}{2} mgL \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

解法 2



図のように回転座標系をとる。 $c_2 = \cos \theta$ 、 $s_2 = \sin \theta$ とおく。 回転座標系で角速度をあらわすと

$$\vec{\omega} = \omega_0 s_2 \cdot \hat{i} + \omega_0 c_2 \cdot \hat{k}$$

点 A の加速度は $L_G = \frac{1}{2}L$ とすると

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{L}_G) = \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} L_G \omega_0^2 c_2^2 \\ 0 \\ L_G \omega_0^2 c_2 s_2 \end{pmatrix}$$

で、ニュートンの第 2 法則から

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} - mg \cdot \begin{pmatrix} -s_2 \\ 0 \\ -c_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -L_G \omega_0^2 c_2^2 \\ 0 \\ -L_G \omega_0^2 c_2 s_2 \end{pmatrix}$$

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{F} = m \begin{pmatrix} -L_G \omega_0^2 c_2^2 + g s_2 \\ 0 \\ -L_G \omega_0^2 c_2 s_2 + g c_2 \end{pmatrix}$$

回転床の固定点 O を原点として回転座標を図のようにさだめる。 点 O まわりの全モーメントは

$$\Sigma \vec{M} = \vec{C} + \begin{pmatrix} L_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -m g s_2 \\ 0 \\ -m g c_2 \end{pmatrix} = \vec{C} + \begin{pmatrix} 0 \\ m g L_G c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つぎに、平行軸の定理を用いて、点 O (点 B)まわりの慣性モーメントと慣性積を求める。

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m = 0$$

$$I_{yy} = I_{y'y'} + (d_z^2 + d_x^2)m = \frac{1}{3}mL^2$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m = \frac{1}{3}mL^2$$

$$I_{yz} = I_{y'z'} + d_y d_z m = 0$$

$$I_{zx} = I_{z'x'} + d_z d_x m = 0$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y m = 0$$

この結果を回転運動の方程式に代入すると

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y + mgL_G c_2 \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 s_2 \\ 0 \\ \omega_0 c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}m\omega_0^2 L^2 c_2 s_2 - \frac{1}{2}mgL c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$