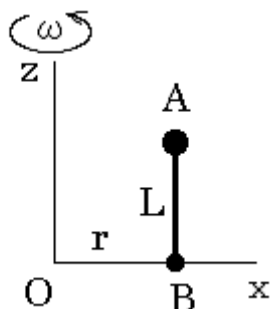


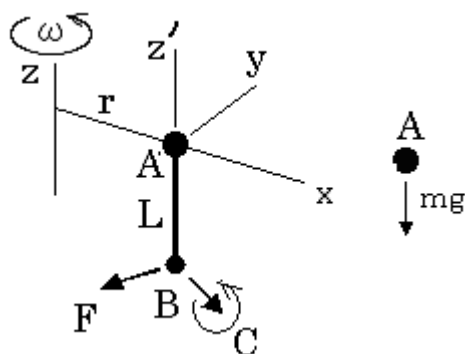
力とモーメント (1)



回転床が角速度  $\omega$  で回転している。アーム L は回転床に点 B に固定されている。アーム L の質量は無視できるものとする。アーム先端の点 A に質量  $m$  が集中しているものとする。アーム L の端点 B が回転床から受ける力とモーメントを求めたい。

解法 1

物体とともに動く座標原点を質量中心点 A にとる。



点 A の加速度は  $\vec{a} = -\omega^2 r \cdot \hat{i}$  で、ニュートンの第 2 法則から

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} - mg \cdot \hat{k} = -m\omega^2 r \cdot \hat{i}$$

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{F} = -m\omega^2 r \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k}$$

偶力  $\vec{C}$  と力  $\vec{F}$  によって質点 A が受ける全モーメントは

$$\Sigma \vec{M} = \vec{C} + (-L \cdot \hat{k}) \times (-m\omega^2 r \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k})$$

$$= C_x \hat{i} + (C_y + m\omega^2 rL) \hat{j} + C_z \hat{k}$$

そしてこの座標系においては

$$[I] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

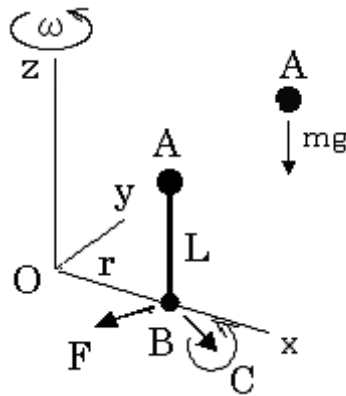
で、その角速度は  $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{k}$  だから、回転運動の方程式は

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y + m\omega^2 rL \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

で、右辺は0となるから、アームの回転床より受けるモーメントは

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\omega^2 rL \\ 0 \end{pmatrix}$$

解法 2



回転床の固定点 O を原点として回転座標を図のようにさだめる。点 O まわりの全モーメントは

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{M} &= \vec{C} + (r \cdot \hat{i}) \times (-m\omega^2 r \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k}) + (r \cdot \hat{i} + L \cdot \hat{k}) \times (-mg \cdot \hat{k}) \\ &= \vec{C} \end{aligned}$$

したがって、点 O まわりのモーメントは回転床によるもののみとなる。平行軸の定理を用いて、点 O まわりの慣性モーメントと慣性積を求める。

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m = 0 + L^2 m = mL^2$$

$$I_{yy} = I_{y'y'} + (d_z^2 + d_x^2)m = 0 + (r^2 + L^2)m = mL^2 + mr^2$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m = mr^2$$

$$I_{yz} = I_{y'z'} + d_y d_z m = 0$$

$$I_{zx} = I_{z'x'} + d_z d_x m = mrL$$

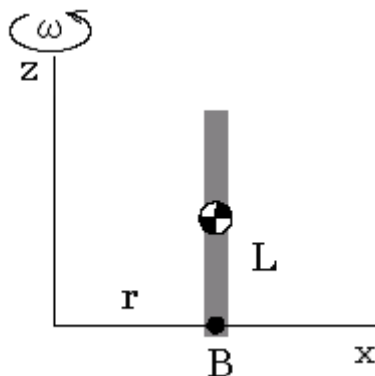
$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y m = 0$$

この結果を回転運動の方程式に代入すると

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mL^2 & 0 & -mrL \\ 0 & mr^2 + mL^2 & 0 \\ -mrL & 0 & mr^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -m\omega^2 rL \\ 0 \end{pmatrix}$$

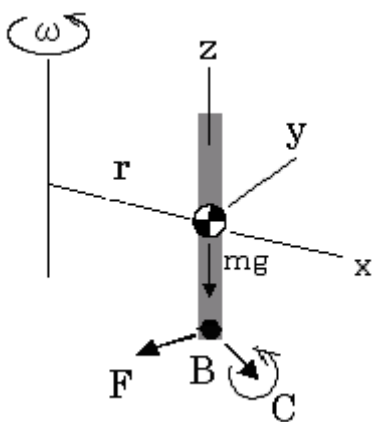
## 力とモーメント ( 2 )



回転床が角速度  $\omega$  で回転している。アーム L は回転床に点 B に固定されている。アーム L の質量を  $m$  とする。アーム L の端点 B が回転床から受ける力とモーメントを求めたい。

## 解法 1

物体とともに動く座標原点を質量中心点 A にとる。



点 A の加速度は  $\vec{a} = -\omega^2 r \cdot \hat{i}$  で、ニュートンの第 2 法則から

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} - mg \cdot \hat{k} = -m\omega^2 r \cdot \hat{i}$$

回転床からアーム L が受ける力は

$$\vec{F} = -m\omega^2 r \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k}$$

偶力  $\vec{C}$  と力  $\vec{F}$  によって質点 A が受ける全モーメントは

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{M} &= \vec{C} + \left(-\frac{1}{2}L \cdot \hat{k}\right) \times (-m\omega^2 r \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k}) \\ &= C_x \hat{i} + \left(C_y + \frac{1}{2}m\omega^2 rL\right) \hat{j} + C_z \hat{k}\end{aligned}$$

そしてこの座標系においては

$$[I] = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{pmatrix}$$

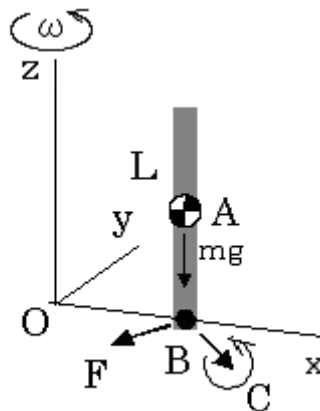
で、その角速度は  $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{k}$  だから、回転運動の方程式は

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y + \frac{1}{2}m\omega^2 rL \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12}mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

で、右辺は0となるから、アームの回転床より受けるモーメントは

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}m\omega^2 rL \\ 0 \end{pmatrix}$$

解法 2



回転床の固定点 O を原点として回転座標を図のようにさだめる。点 O まわりの全モーメントは

$$\Sigma \vec{M} = \vec{C} + (r \cdot \hat{i}) \times (-m\omega^2 r \cdot \hat{i} + mg \cdot \hat{k}) + (r \cdot \hat{i} + \frac{1}{2}L \cdot \hat{k}) \times (-mg \cdot \hat{k})$$

$$= \vec{C}$$

したがって、点Oまわりのモーメントは回転床によるもののみとなる。  
 平行軸の定理を用いて、点Oまわりの慣性モーメントと慣性積を求める。

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m = \frac{1}{12}mL^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m = mL^2$$

$$I_{yy} = I_{y'y'} + (d_z^2 + d_x^2)m = \frac{1}{12}mL^2 + (r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2)m = \frac{1}{3}mL^2 + mr^2$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m = mr^2$$

$$I_{yz} = I_{y'z'} + d_y d_z m = 0$$

$$I_{zx} = I_{z'x'} + d_z d_x m = \frac{1}{2}mrL$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y m = 0$$

この結果を回転運動の方程式に代入すると

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}mL^2 & 0 & -\frac{1}{2}mrL \\ 0 & mr^2 + \frac{1}{3}mL^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}mrL & 0 & mr^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}m\omega^2 rL \\ 0 \end{pmatrix}$$