

オイラーの方程式

剛体の角運動量は

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

オイラーの方程式

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{dt} &= \frac{dH_x}{dt} \hat{i} + \frac{dH_y}{dt} \hat{j} + \frac{dH_z}{dt} \hat{k} + H_x \dot{\hat{i}} + H_y \dot{\hat{j}} + H_z \dot{\hat{k}} \\ &= \frac{dH_x}{dt} \hat{i} + \frac{dH_y}{dt} \hat{j} + \frac{dH_z}{dt} \hat{k} + \vec{\Omega} \times \vec{H} \end{aligned}$$

書き直すと

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

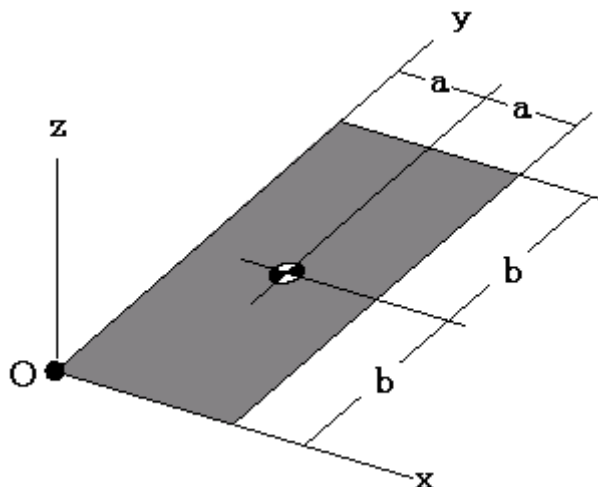
回転座標を回転する剛体にとるときは = となるから

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

または

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \right)$$

例題



組み立て工程で、4 kg の長方形 (a = 150 mm、b = 300 mm) の鉄板が点 O でマニプレータにつかまれている。今の瞬間で鉄板は水平にあり、その角速度と角加速度は以下のとおりである。マニプレータにより鉄板に加えられるモーメントはいくらか？

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rad/s} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rad/s}^2$$

ただし、鉄板の点 O まわりの慣性行列は次のとおりとする。

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 & -0.18 & 0 \\ -0.18 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

解法

ここで、座標軸は鉄板に固定されているから、座標軸の角速度はその角速度と等しい。

したがって、点 O まわりのモーメントの合計は

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\omega_x / dt \\ d\omega_y / dt \\ d\omega_z / dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

点 O まわりのモーメントの合計はマニプレータによるモーメント \vec{C} と鉄板の重さによるものだから

$$\sum \vec{M}_O = \vec{C} + \vec{r} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

これら 2 個の方程式からマニプレータによるモーメント \vec{C} が計算できる。
では十進 BASIC で計算しよう。

```
!!3Dキネ11a.bas 06-2-19
dim r(3),I(3,3),w(3),aa(3),C(3),M0(3),fg(3)   print "Cx=   Cy=   Cz=   [Nm]"
dim Idwdt(3),Iw(3),wxIw(3),rxfg(3)         mat print C

let g=9.81                                   END
let m1=4
data 0.15,0.3,0                               END
mat read r
                                            プリント結果
data 0.48,-0.18,0                             Cx=   Cy=   Cz=   [Nm]
data -0.18,0.12,0                             5.892  -3.366  .72
data 0,0,0.6
mat read I

data 4,-2,0
mat read w

data -10,6,0
mat read aa

mat Idwdt=I*aa
mat Iw=I*w
mat wxIw=cross(w,Iw)

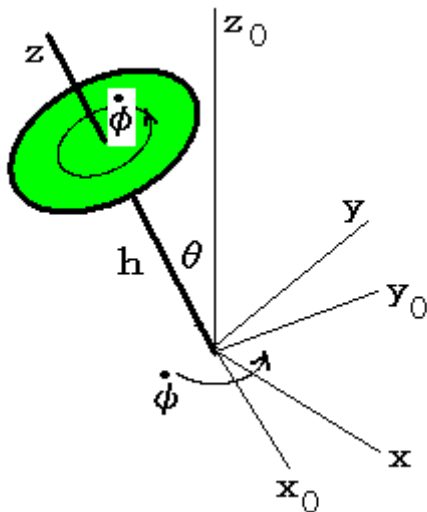
mat M0=Idwdt+wxIw

let fg(3)=-m1*g

mat rxfg=cross(r,fg)

mat C=M0-rxfg                                ---
```

こまの例 角運動量、オイラーの公式



こまの回転座標系の x-y-z の角速度成分は下のごとくである。

$$\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

また、こまは回転座標の z-軸を角速度 $\dot{\phi}$ でまわるから

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

時間で微分すると

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

こまにたいしてオイラーの公式は

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\text{分解して} \quad \begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} \dot{\omega}_x \\ I_{yy} \dot{\omega}_y \\ I_{zz} \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} \omega_x \\ I_{yy} \omega_y \\ I_{zz} \omega_z \end{pmatrix}$$

さらに分解して

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{\omega}_x - \Omega_z I_{yy}\omega_y + \Omega_y I_{zz}\omega_z \\ I_{yy}\dot{\omega}_y + \Omega_z I_{xx}\omega_x - \Omega_x I_{zz}\omega_z \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - \Omega_y I_{xx}\omega_x + \Omega_x I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$$

に、 を代入して、かつ $I_{xx} = I_{yy}$ であることを考慮すると

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\ddot{\theta} + (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi} \sin\theta \\ I_{xx}(\ddot{\psi} \sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos\theta) - I_{zz}(\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\theta} \cos\theta) \\ I_{zz}(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin\theta) \end{pmatrix}$$

「こま」では

$$\begin{pmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mgh \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから、回転している「こま」の角加速度を式であらわすことができ、数値積分することで、運動方程式を解くことができる。

才差運動の条件に近い諸元を与えて、「こま」の回転のシミュレーションをやってみよう。 こまは円板と軸からなるものとし、軸の質量は無視する。

円板の質量 $m = 80\text{g}$

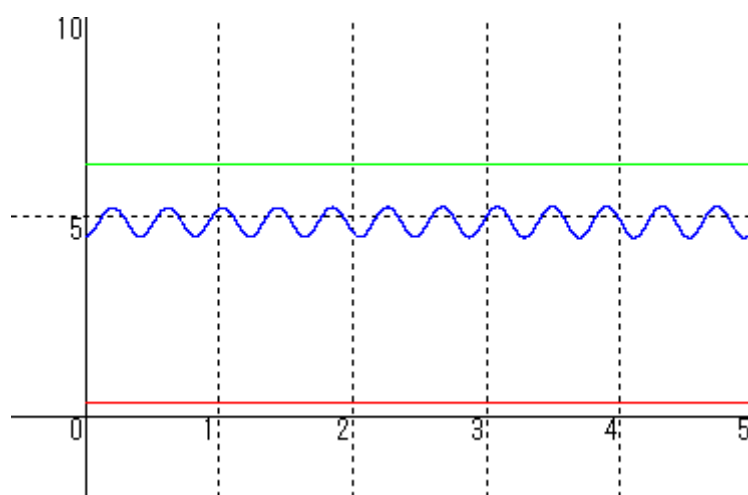
円板の半径 $r = 28\text{mm}$

軸の下端から重心までの距離 $h = 10\text{cm}$

こまの自転の回転数 $\dot{\phi} = 6000\text{rpm}$

軸の初期の傾き角 $\theta = \pi/9$

公転の初期の回転角速度 $\dot{\psi} = 4.5\text{rad/s}$



角速度のグラフ

サンプルプログラムを次にしめす。

```

!top02a.bas 06-3-26
set window -1,5,-10,10
set axis color 1
draw grid(1,5)
let dt=0.0002
let m=80/1000
let g=9.8
let r=28/1000
let h=0.1
let Ixx=m*r^2/4+m*h^2
let Iyy=m*r^2/4+m*h^2
let Izz=m*r^2/2
let th2=pi/9

let w3=6000*2*pi/60
let w1=4.5
for t=0 to 5 step dt
  let Mmx=m*g*h*sin(th2)-(Izz-Ixx)*w1^2*sin(th2)*cos(th2)-Izz*w3*w1*sin(th2)
  let Mmy=-2*Ixx*w1*w2*cos(th2)+Izz*(w3*w2+w1*w2*cos(th2))
  let Mmz=-Izz*(alf1*cos(th2)-w1*w2*sin(th2))

  let alf2=Mmx/Ixx
  let alf1=Mmy/Ixx/sin(th2)
  let alf3=Mmz/Izz

  let w1=w1+alf1*dt
  let w2=w2+alf2*dt
  let w3=w3+alf3*dt

  let th1=th1+w1*dt
  let th2=th2+w2*dt
  set line color 2
  plot t,w1
  set line color 3
  plot t,w3/100
  set line color 4
  plot t,th2

next t

END

```