

## 角運動量

剛体を構成する粒子の角運動量の合計は

$$\vec{H} = \sum \vec{r} \times m\vec{v} = \sum m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

書き直すと

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \sum m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z\omega_y - y\omega_z \\ x\omega_z - z\omega_x \\ y\omega_x - x\omega_y \end{pmatrix} = \sum m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \sum m \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \sum m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

結局

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$