

安定性の判別

1. 特性方程式が以下の式で与えられているとき、

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 2 = 0$$

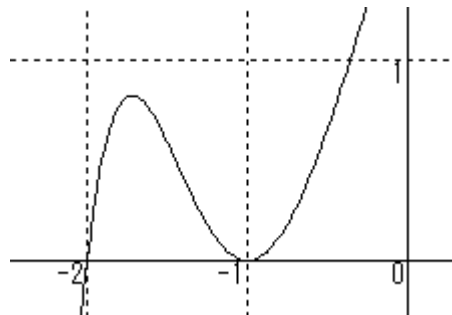
この特性方程式の安定性をラウスの方法によって調べよ。

(演習制御工学、日本機械学会、p.38)

ラウスの方法はここでは使わずに次のようにやって見よう。

まず、この方程式は5次方程式であるから、根は5個あり、しかも、少なくとも1個の根は実数である。様子を見るために実軸 x に対するグラフを描いてみよう。

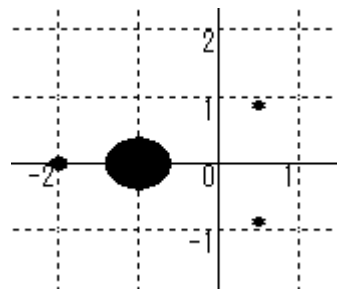
```
!安定性 01a.bas
set window -3,2,-2,2
set axis color 1
draw grid
for x=-5 to 2 step 0.02
  let s=x
  let y=s^5+3*s^4+2*s^3+s^2+3*s+2
  plot lines:x,y;
next x
END
```



なんだ！ あっさり泥をはいた。根の1個は -2 で、 -1 の重根があるので、あと2個の複素数の根があるはずだ。どこか？

複素平面をスキャンしよう。

```
!安定性 01.bas
option arithmetic complex
set window -3,2,-3,3
set axis color 1
draw grid
let i=complex(0,1)
for x=-5 to 2 step 0.02
  for y=-2 to 2 step 0.02
    let s=x+i*y
    if abs(1/(s^5+3*s^4+2*s^3+s^2+3*s+2))>5 then
```



```

        plot points:x,y
    end if
next y
next x
END

```

複素平面の右半分に 2 個の根が見えた。 この系は不安定である。

2 . 倒立振り子の状態方程式は次の式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mL(m+M)g}{J(m+M)+mML^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m^2L^2g}{J(m+M)+mML^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

数値を与えて安定性を調べよ。

特性方程式 $|Is - A| = 0$ の根の位置を調べる。

```

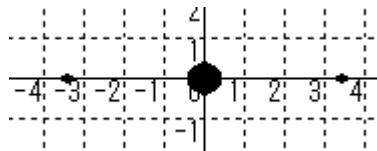
!inverted pendulum
!機械制御入門 p.101
!安定性 02.bas
option arithmetic complex
set window -10,10,-10,10
set axis color 1
draw grid
dim A(4,4),IS(4,4),IS_A(4,4)

let i=complex(0,1)

let m=1
let L=1
let mm=1
let g=9.8
let J=m*L^2/3
let aa=J*(m+mm)+m*mm*L^2
let A(1,2)=1
let A(2,1)=(m*L*(m+mm)*g)/aa
let A(3,4)=1
let A(4,1)=-m^2*L^2*g/aa

for x=-4 to 4 step 0.01
  for y=-2 to 2 step 0.01
    let s=x+i*y
    mat Is=s*IDN(4)

```



```

mat IS_A=Is-A
let PPP=det(IS_A)
if 1/abs(PPP)>1 then
  plot points:x,y
end if
next y
next x
END

```

右半分に根が 1 個ある。 不安定だ。

根が 3 個しか見当たらない。 ためしに実軸 x にたいするグラフを描いて見よう。 原点のあたりに重根があった！

```

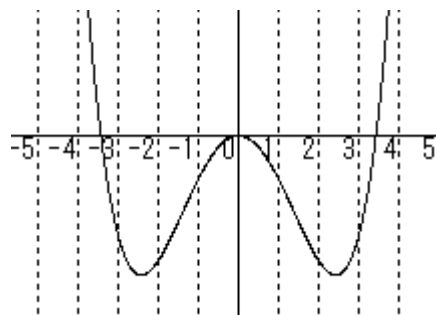
!inverted pendulum
!機械制御入門 p.101
!安定性 02b.bas
set window -10,10,-100,100
set axis color 1
draw grid(1,100)
dim A(4,4),IS(4,4),IS_A(4,4)

```

```

let m=1
let L=1
let mm=1
let g=9.8
let J=m*I^2/3
let aa=J*(m+mm)+m*mm*L^2
let A(1,2)=1
let A(2,1)=(m*L*(m+mm)*g)/aa
let A(3,4)=1
let A(4,1)=-m^2*L^2*g/aa
for x=-4 to 4 step 0.01
  let s=x
  mat Is=s*IDN(4)
  mat IS_A=Is-A
  let PPP=det(IS_A)
  plot lines:x,PPP;
next x
END

```



3 . 倒立振り子に制御をかけて見よう。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mL(m+M)g}{J(m+M)+mML^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m^2L^2g}{J(m+M)+mML^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mL \\ \frac{J(m+M)+mML^2}{J+mL^2} \\ \frac{0}{J(m+M)+mML^2} \end{pmatrix} u$$

$K = (k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4)$ とおく。特性方程式 $|Is - (A + BK)| = 0$ の根の位置を調べることによって、この制御系の安定性を調べよ。

「機械制御入門」(末松著、オーム社 1990 年第 1 版第 2 刷)

```

!inverted pendulum
!機械制御入門 p.101
!invpen08.bas
option arithmetic complex
set window -5,5,-5,5
set axis color 1
draw grid with scale(1,1)
dim A(4,4),B(4,1),D(4,4),Ax(4)
dim K(1,4),u(1),BK(4,4),IS(4,4),IS_D(4,4)

let i=complex(0,1)

let m=1
let L=1
let mm=1
let g=9.8
let J=m*L^2/3

let aa=J*(m+mm)+m*mm*L^2

data 55.6,16.7,4.17,5
mat read K

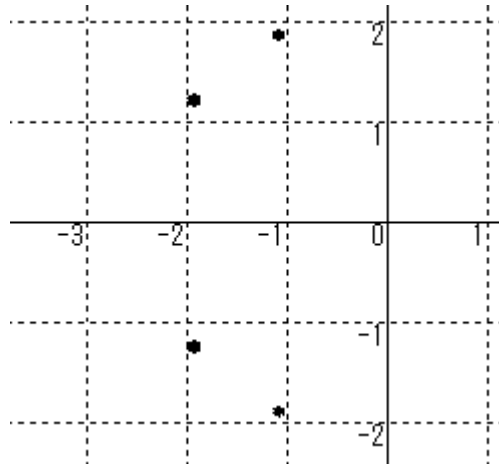
let A(1,2)=1
let A(2,1)=(m*L*(m+mm)*g)/aa
let A(3,4)=1
let A(4,1)=-m^2*L^2*g/aa

let B(2,1)=-m*L/aa
let B(4,1)=(J+m*L^2)/aa

mat BK=B*K
mat D=A+BK
let s=x+i*y
mat Is=s*IDN(4)
mat IS_D=Is-D
let PPP=det(IS_D)
if 1/abs(PPP)>5 then
plot points:x,y
end if

next y
next x
END

```



for x=-2.5 to 0.5 step 0.01
for y=-2.5 to 2.5 step 0.01

4. フレキシブルアームの無次元化した状態方程式の係数が次であらわされるとする。

6 個の K を与えて、特性方程式 $|Is - (A + BK)| = 0$ の根の位置を調べることによって、この制御系の安定性を調べよ。

「機械制御入門」(末松著、オーム社 1990 年第 1 版第 2 刷)

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & -9.47 & 0 & 3.37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.87 & -31.0 & 0 & 15.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.8 & 53.2 & 0 & -36.15 & 0 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0 \\ 0.43 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

[極の位置]

```
!flexible arm
!機械制御入門 p.146A-BK の極の位置
!rbarm02.bas
option arithmetic complex
set window -5,5,-10,10
set axis color 1
draw grid with scale(1,1)
set line width 10
dim A(6,6),B(6,1),D(6,6),Ax(6)
dim K(1,6),u(1),BK(6,6),IS(6,6),IS_D(6,6)
let i=complex(0,1)
data -48.580036,-79.1122244,-174.91836697
data 33.37528387,94.70136122,16.2337943
mat read K

let A(1,2)=1
let A(2,2)=-0.8
let A(2,3)=-9.47
let A(2,5)=3.37
let A(3,4)=1
let A(4,2)=-0.87
let A(4,3)=-31.0
let A(4,5)=15.3
let A(5,6)=1
let A(6,2)=-0.8
let A(6,3)=53.2
let A(6,5)=-36.15

let B(2,1)=0.4
let B(4,1)=0.43
let B(6,1)=0.4

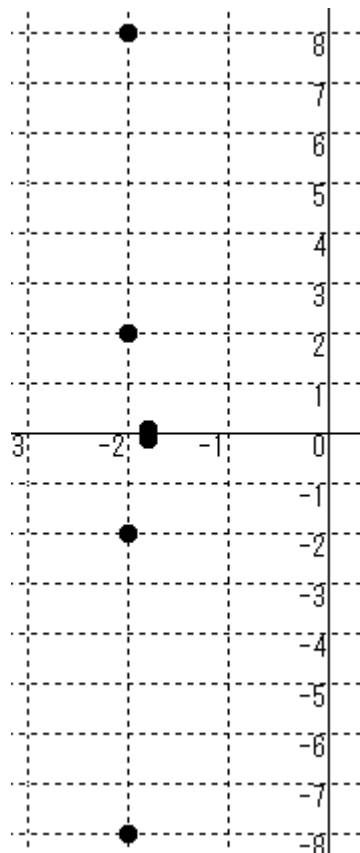
for x=-2.2 to -1.76 step 0.02
for y=-8.1 to 8.1 step 0.1

mat BK=B*K
mat D=A+BK
let s=x+i*y
mat Is=s*IDN(6)
mat IS_D=Is-D
```

```
let PPP=det(IS_D)
if 1/abs(PPP)>1 then
plot lines:x,y
end if

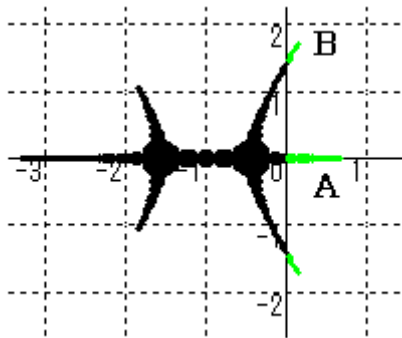
next y
next x

END
```



5. 閉ループ系の特性方程式が $s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$ のとき、系が安定であるための k の範囲を求めよ。

(演習制御工学、日本機械学会、p.39「例 5.4 の後半」)



```
!安定性 01b.bas
option arithmetic complex
set window -6,4,-6,6
set axis color 1
draw grid
```

```
set line width 3
let i=complex(0,1)
for k=-3 to 10 step 0.2
  for x=-5 to 2 step 0.02
    for y=-2 to 2 step 0.02
      let s=x+i*y
      if abs(1/(s^3+3*s^2+2*s+k))>10 then
        if x>0 then
          set line color 3
        else
          set line color 1
        end if
        plot lines:x,y
      end if
    next y
  next x
next k
END
```

k の値を小さい値から大きい値まで与えて根の軌跡がどのような順番で描かれるか観察すればよくわかる。

右半分では最初 A から出発して左へ向かい、最後に B に出てくることが一目瞭然である。

$0 < k < 6$ が根のすべてが左半分に存在するための条件である、ということが容易に突き止めることができるだろう。