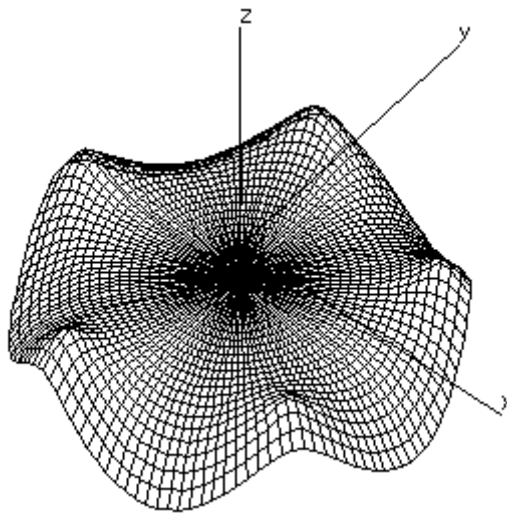


多項式からなる方程式の根を探る

1. もっとも簡単な5次方程式 $s^5 + 1 = 0$

5次方程式には5個の根がある。根には複素数が含まれる。 $s^5 + 1 = 0$ とはこの左辺の絶対値が0ということである。

方程式左辺の絶対値に負号をつけて、グラフを描いてみよう。

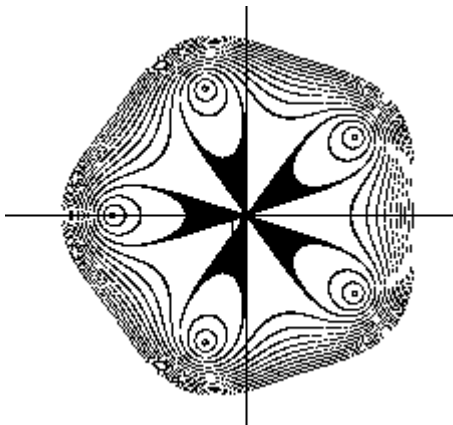


絶対値に負号のついたものの最大値は0である。上の図のネット状の平面は5箇所にて頂上がある。これがこの方程式の根の位置をしめしている。

<pre>!複素方程式 01a.bas option arithmetic complex let s=4 set window -0.5*s,0.5*s,-0.5*s,0.5*s let kk=1.7 let alpha=40 let beta=40 let stp=0.05 let i=complex(0,1) let k=1 def f(s)=s^5+k ! 曲面----- for r=0 to 1.2 step stp for t=-pi to pi step stp let x=r*cos(t) let y=r*sin(t)</pre>	<pre>! 軸----- call plotto(0,0,0) call plotto(kk,0,0) call plotto(0,0,0) call plotto(0,kk,0) call plotto(0,0,0) call plotto(0,0,kk) call penup call plottext(kk,0,0,"x") call plottext(0,kk,0,"y") call plottext(0,0,kk,"z") call plottext(-2,-1,-2,"0") !-----subroutines----- sub rotx(x,y,z,a) let y0=y*cos(a)-z*sin(a) let z0=y*sin(a)+z*cos(a)</pre>	<pre>sub convert(x,y,z) call rotx(x,y,z,-alpha*pi/180) call rotx(x,y,z,-beta*pi/180) end sub sub plotto(x,y,z) let x1=x let y1=y let z1=z call convert(x1,y1,z1) plot lines:x1,y1; end sub sub plottext(x,y,z,s\$) let x1=x let y1=y let z1=z call convert(x1,y1,z1) plot text ,at x1,y1: s\$ end sub</pre>
---	---	---

<pre> let s=x+i*y let z=-abs(f(s))/4 call Plotto(x,y,z) next t plot lines next r for t=-pi to pi step stp for r=0 to 1.2 step stp let x=r*cos(t) let y=r*sin(t) let s=x+i*y let z=-abs(f(s))/4 call Plotto(x,y,z) next r plot lines next t </pre>	<pre> let y=y0 let z=z0 end sub sub roty(x,y,z,a) let x0=x*cos(a)+z*sin(a) let z0=-x*sin(a)+z*cos(a) let x=x0 let z=z0 end sub sub rotz(x,y,z,a) let x0=x*cos(a)-y*sin(a) let y0=x*sin(a)+y*cos(a) let x=x0 let y=y0 end sub </pre>	<pre> END </pre>
--	---	--------------------------

この平面の等高線を描かせてみよう。こちらの方が上の曲平面を描かせるプログラムより短い。



```

!複素方程式 02d.bas
option arithmetic complex
set window -3,3,-3,3
set axis color 1
draw axes(10,10)

let i=complex(0,1)
def f(s)=s^5+1
set line width 2
for kk=-4 to 0.2 step 0.3
for x=-3 to 2 step 0.005
for y=-2 to 2 step 0.005
let s=x+i*y
if kk<=-abs(f(s)) and -abs(f(s))<=kk+0.02 then
plot lines:x,y
end if
next y
next x
plot lines
next kk
end
    
```

2 . 方程式 $3s^5 + 2s^4 + 6s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0$ の根を見つける。

この方程式は $s^5 + 1 = 0$ の変形である。等高線をかかせてみる。

!複素方程式 02e.bas

```
option arithmetic complex
```

```
set window -3,3,-3,3
```

```
set axis color 1
```

```
draw axes(10,10)
```

```
let i=complex(0,1)
```

```
def f(s)=3*s^5+2*s^4+6*s^3+s^2+4*s+4
```

```
set line width 2
```

```
for kk=-4 to 0.2 step 0.5
```

```
  for x=-2 to 1 step 0.003
```

```
    for y=-1.5 to 1.5 step 0.003
```

```
      let s=x+i*y
```

```
      if kk<=-abs(f(s)) and -abs(f(s))<=kk+0.02 then
```

```
        plot lines:x,y
```

```
      end if
```

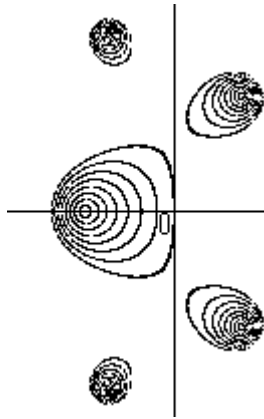
```
    next y
```

```
  next x
```

```
plot lines
```

```
next kk
```

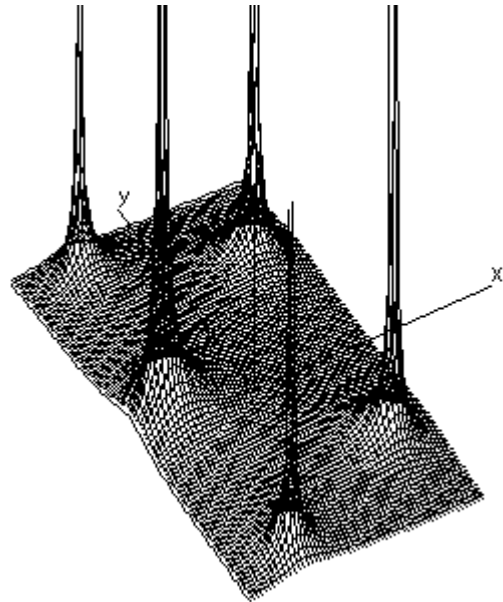
```
end
```



次に複素平面をスキャンして、関数の逆数の絶対値をグラフにしてみると次の図のようになる。

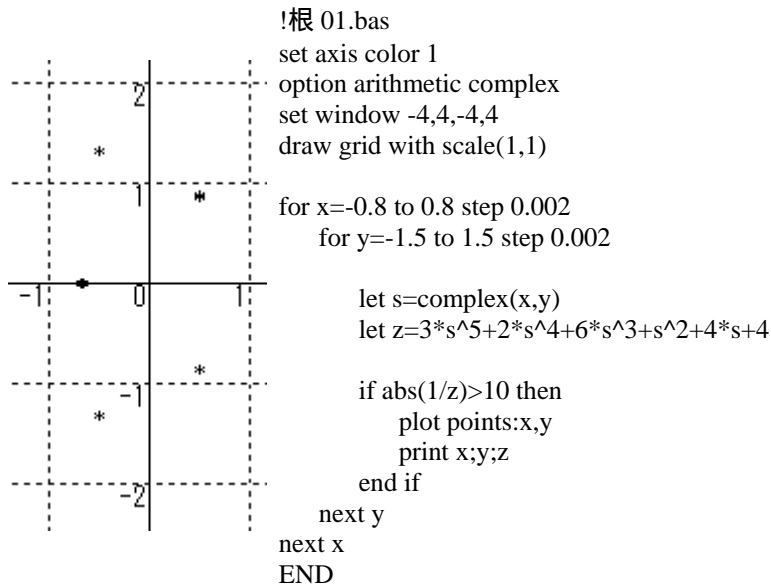
もし、方程式がいわゆる特性方程式である場合には、方程式の逆数の絶対値とは、伝達関数そのものの絶対値でもある。

絶対値の根が複素平面上を右図のように存在すると表現することもできる。



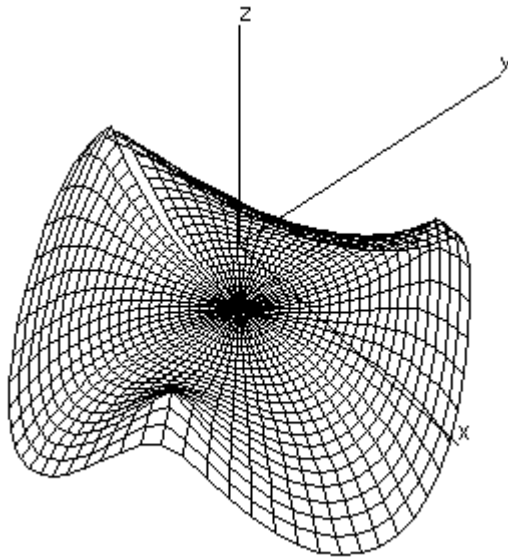
<pre>!複素方程式 03.bas option arithmetic complex let s=5 set window -0.5*s,0.5*s,-0.5*s,0.5*s let kk=1.7 let alpha=-30 let beta=40 let stp=0.03 let i=complex(0,1) let k=1 def f(s)=1/(3*s^5+2*s^4+6*s^3+s^2+4*s+4) ! 曲面----- for x=-0.9 to 0.8 step stp for y=-1.5 to 1.5 step stp let s=x+i*y let z=abs(f(s)) call Plotto(x,y,z) next y plot lines next x for y=1.5 to -1.5 step -stp for x=0.8 to -0.9 step -stp let s=x+i*y let z=abs(f(s)) call Plotto(x,y,z) next x plot lines next y</pre>	<pre>! 軸----- call plotto(0,0,0) call plotto(kk,0,0) call plotto(0,0,0) call plotto(0,kk,0) call plotto(0,0,0) call plotto(0,0,kk) call penup call plottext(kk,0,0,"x") call plottext(0,kk,0,"y") call plottext(0,0,kk,"z") call plottext(-2,-1,-2,"0") !-----subroutines----- sub rotx(x,y,z,a) let y0=y*cos(a)-z*sin(a) let z0=y*sin(a)+z*cos(a) let y=y0 let z=z0 end sub sub roty(x,y,z,a) let x0=x*cos(a)+z*sin(a) let z0=-x*sin(a)+z*cos(a) let x=x0 let z=z0 end sub</pre>	<pre>sub rotz(x,y,z,a) let x0=x*cos(a)-y*sin(a) let y0=x*sin(a)+y*cos(a) let x=x0 let y=y0 end sub sub convert(x,y,z) call rotz(x,y,z,-alpha*pi/180) call rotx(x,y,z,-beta*pi/180) end sub sub plotto(x,y,z) let x1=x let y1=y let z1=z call convert(x1,y1,z1) plot lines:x1,y1; end sub sub plottext(x,y,z,s\$) let x1=x let y1=y let z1=z call convert(x1,y1,z1) plot text ,at x1,y1: s\$ end sub END</pre>
---	---	---

根の位置を探るために、方程式の逆数の絶対値の塔の位置をスキャンしてもよい。



3. 3次元方程式 $s^5 + 1 = 0$ を検討しよう。
 左辺の絶対値に負号をつけて、グラフを描く。

```
!複素方程式01.bas
option arithmetic complex
let s=4
set window -0.5*s,0.5*s,-0.5*s,0.5*s
let kk=1.7
let alpha=50
let beta=40
let stp=0.1
let i=complex(0,1)
```



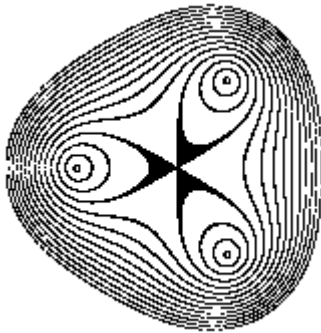
```
let k=1
def f(s)=s^3+k
! 曲面-----
for r=0 to 1.2 step 0.05
  for t=-pi to pi step stp
    let x=r*cos(t)
    let y=r*sin(t)
    let s=x+i*y
    let z=-abs(f(s))/2
    call Plotto(x,y,z)
  next t
  call PenUp
next r
for t=-pi to pi step stp
  for r=0 to 1.2 step 0.05
    let x=r*cos(t)
    let y=r*sin(t)

    let s=x+i*y
    let z=-abs(f(s))/2
    call Plotto(x,y,z)
  next r

  plot lines
next t
```

以下 5 次元のものと同じ

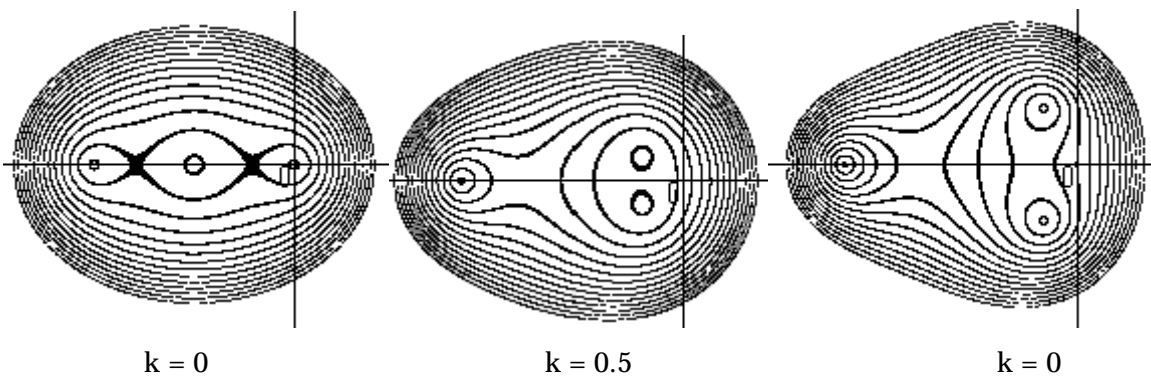
等高線を描く



!複素方程式 02c.bas

```
option arithmetic complex
set window -4,4,-4,4
let i=complex(0,1)
def f(s)=s^3+1
set line width 2
for kk=-4 to 0.2 step 0.3
  for x=-3 to 2 step 0.005
    for y=-2 to 2 step 0.005
      let s=x+i*y
      if kk<=-abs(f(s)) and -abs(f(s))<=kk+0.02 then
        plot lines:x,y
      end if
    next y
  next x
  plot lines
next kk
end
```

4 . $s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$ の k の値を 0、0.5、1 として等高線を描いてみよう。



なんともかわいいではないか。

```
!複素方程式 02ba.bas
option arithmetic complex
set window -4,4,-4,4
set axis color 1
draw grid(10,10)
let i=complex(0,1)
let k=0
def f(s)=s^3+3*s^2+2*s+k
set line width 2
for kk=-4 to 0.2 step 0.3
  for x=-3 to 1 step 0.005
    for y=-2 to 2 step 0.005
      let s=x+i*y
      if kk<=-abs(f(s)) and -abs(f(s))<=kk+0.02 then
        plot lines:x,y
      end if
    next y
  next x
  plot lines
next kk
end
```

この章で知ったことをもって、安定性の問題にのぞもう。