

## 極配置法による状態フィードバックゲインを求める

1. 状態方程式の係数行列が2行2列の場合

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{の場合について考えよう。}$$

閉ループ係数は

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 - 3 & k_2 - 2 \end{pmatrix}$$

閉ループ系の特性方程式は

$$\det(sI - A - bK) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -k_1 + 3 & s - k_2 + 2 \end{vmatrix} = s^2 - (-k_2 + 2)s - k_1 + 3 = 0$$

配置したい極を  $s_1 = -1 + 2 \cdot i$  と  $s_2 = -1 - 2 \cdot i$  として  $k_1, k_2$  を次のような2元1次連立方程式にして求めよう。

$$\begin{pmatrix} -a_{11}k_1 & -a_{12}k_2 \\ -a_{21}k_1 & -a_{22}k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{a}) \quad \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (\text{b})$$

特性方程式を変形する。

$$s^2 - (-k_2 + 2)s - k_1 + 3 = -k_1 - s \cdot k_2 + s^2 + 2 \cdot s + 3 = 0 \quad (\text{c})$$

方程式に  $s_1 = -1 + 2 \cdot i$  を代入する。

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } -k_1 - s \cdot k_2 + s^2 + 2 \cdot s + 3 = -2 \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ のとき } -k_1 - s \cdot k_2 + s^2 + 2 \cdot s + 3 = -1 - 2 \cdot i \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } -k_1 - s \cdot k_2 + s^2 + 2 \cdot s + 3 = -3 \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ のとき } -k_1 - s \cdot k_2 + s^2 + 2 \cdot s + 3 = -2 - 2 \cdot i \quad (4)$$

(a) (b) (c) と (1) (2) (3) (4) をよく眺めてほしい。

次のようなプログラムが自然と浮かんでくるだろう。

```
!制御工学 p.100          -----
!極配置 01b.bas

option arithmetic complex
dim A(2,2),K(1,2),AAA(2,2),BBB(2,1),CCC(2,2)
let i=complex(0,1)

let A(1,2)=1
let A(2,1)=-3
let A(2,2)=-2

let s=-1+2*i
for ii=1 to 2
  let K(1,1)=1
  let K(1,2)=1

  let
  PPP1=s^2+(-K(1,2)-A(2,2))*s-K(1,1)-A(2,1)
  let RPP1=Re(PPP1)
  let IPP1=Im(PPP1)

  let K(1,ii)=0
  let
  PPP2=s^2+(-K(1,2)-A(2,2))*s-K(1,1)-A(2,1)
  let RPP2=Re(PPP2)
  let IPP2=Im(PPP2)
  let AAA(1,ii)=RPP1-RPP2
  let AAA(2,ii)=IPP1-IPP2
next ii

let K(1,1)=0
let K(1,2)=0

let
PPP1=s^2+(-K(1,2)-A(2,2))*s-K(1,1)-A(2,1)
let RPP1=Re(PPP1)
let IPP1=Im(PPP1)
let BBB(1,1)=-RPP1
let BBB(2,1)=-IPP1

mat print AAA
mat print BBB

mat CCC=inv(AAA)
mat K=CCC*BBB
mat print K

END
                                プリント
                                -1          1
                                0          -2
                                2
                                0
                                -2
                                0
```

さらに、

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ 
 $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
 の場合について、特性方程式を行列式のままで、
 計算することを考えよう。

$$\det(sI - A - bK) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -k_1 + 3 & s - k_2 + 2 \end{vmatrix} = 0$$

2行2列であればさきほどのように、行列式を分解して計算するのも、たいした手間ではないが、次数が大きくなると、筆算で分解して式をつくるのは大変な手間がかかることになるからである。

前のプログラムを少し変更して

!制御工学 p.100  
!極配置 01.bas

-----

```

option arithmetic complex
dim A(2,2),B(2,1),D(2,2),Ax(2)
dim K(1,2),u(1),BK(2,2),IS(2,2),IS_D(2,2)
dim AAA(2,2),BBB(2,1),CCC(2,2)

let i=complex(0,1)

let A(1,2)=1
let A(2,1)=-3
let A(2,2)=-2

let B(2,1)=1

let s=-1+2*i
for ii=1 to 2

    let K(1,1)=1
    let K(1,2)=1

    mat BK=B*K
    mat D=A+BK
    mat Is=s*IDN(2)
    mat IS_D=Is-D
    let PPP1=det(IS_D)
    let RPP1=Re(PPP1)
    let IPP1=Im(PPP1)

    let K(1,ii)=0
    mat BK=B*K
    mat D=A+BK
    mat Is=s*IDN(2)
    mat IS_D=Is-D
    let PPP2=det(IS_D)
    let RPP2=Re(PPP2)
    let IPP2=Im(PPP2)
    let AAA(1,ii)=RPP1-RPP2
    let AAA(2,ii)=IPP1-IPP2

next ii

let K(1,1)=0
let K(1,2)=0

mat BK=B*K
mat D=A+BK
mat Is=s*IDN(2)
mat IS_D=Is-D
let PPP1=det(IS_D)
let RPP1=Re(PPP1)
let IPP1=Im(PPP1)
let BBB(1,1)=-RPP1
let BBB(2,1)=-IPP1

mat print AAA
mat print BBB

mat CCC=inv(AAA)
mat K=CCC*BBB

mat print K

END

```

## 2 . 状態方程式の係数行列が 4 行 4 列の場合

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mL(m+M)g}{J(m+M)+mML^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m^2L^2g}{J(m+M)+mML^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-mL}{J(m+M)+mML^2} \\ 0 \\ \frac{J+mL^2}{J(m+M)+mML^2} \end{pmatrix} u$$

上の例で極を  $-2+i$ 、 $-2-i$ 、 $-1+2i$ 、 $-1-2i$  に配置した場合のフィードバッ

ク係数行列  $K = (k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4)$  をプログラムで求める。 解読せよ。

```

!inverted pendulum
!invpen09.bas
option arithmetic complex

dim A(4,4),B(4,1),D(4,4),Ax(4)
dim K(1,4),u(1),BK(4,4),IS(4,4),IS_D(4,4)
dim AAA(4,4),BBB(4,1),CCC(4,4)

let i=complex(0,1)

let m=1
let L=1
let mm=1
let g=9.8
let J=m*L^2/3

let aa=J*(m+mm)+m*mm*L^2

let A(1,2)=1
let A(2,1)=(m*L*(m+mm)*g)/aa
let A(3,4)=1
let A(4,1)=-m^2*L^2*g/aa

let B(2,1)=-m*L/aa
let B(4,1)=(J+m*L^2)/aa

let s=-2+i
for ii=1 to 4

    let K(1,1)=1
    let K(1,2)=1
    let K(1,3)=1
    let K(1,4)=1

    mat BK=B*K
    mat D=A+BK
    mat Is=s*IDN(4)
    mat IS_D=Is-D
    let PPP1=det(IS_D)
    let RPP1=Re(PPP1)
    let IPP1=Im(PPP1)
    let AAA(1,ii)=RPP1-RPP2
    let AAA(2,ii)=IPP1-IPP2
next ii

let K(1,1)=0
let K(1,2)=0
let K(1,3)=0
let K(1,4)=0

mat BK=B*K
mat D=A+BK
mat Is=s*IDN(4)
mat IS_D=Is-D
let PPP2=det(IS_D)
let RPP2=Re(PPP2)
let IPP2=Im(PPP2)
let AAA(3,ii)=RPP1-RPP2
let AAA(4,ii)=IPP1-IPP2

mat print AAA
mat print BBB

let K(1,1)=0
let K(1,2)=0
let K(1,3)=0
let K(1,4)=0

mat CCC=inv(AAA)
mat K=CCC*BBB
mat print K
END

```

## プリント結果

1.8	-1.2	3.48	-10.16
-2.4	6.6	3.2	-2.92
-1.8	6.6	8.28	-14.68
-2.399999999999999	-1.2	3.2	13.36

42.28  
-23.04  
-28.28  
-71.04

55.268934240362  
16.8027210884351  
4.25170068027189  
5.10204081632638

### 3. 状態方程式の係数行列が6行6列の場合

状態方程式の係数が次であらわされるとする。

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & -9.47 & 0 & 3.37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.87 & -31.0 & 0 & 15.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.8 & 53.2 & 0 & -36.15 & 0 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0 \\ 0.43 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

制御系の極を  $s = -1.8 \pm 0.1j$ 、 $s = -2 \pm 2j$ 、 $s = -2 \pm 8j$  とした場合のフィードバック係数行列  $K$  は次のように求められる。

プログラムはもっとも原始的なものとしているので、長くなっているが、繰り返しのところを整理すると、半分以下の長さとなる。 そのかわりアルゴリズムを追いかけるのが若干わずらわしいものとなる。 このみにあわせるとよい。

```

!flexible arm
!機械制御入門 p.146
!rbarm01.bas
option arithmetic complex

dim A(6,6),B(6,1),D(6,6)
dim K(1,6),BK(6,6),IS(6,6),IS_D(6,6)
dim AAA(6,6),BBB(6,1),CCC(6,6)

let i=complex(0,1)

let A(1,2)=1
let A(2,2)=-0.8
let A(2,3)=-9.47
let A(2,5)=3.37
let A(3,4)=1
let A(4,2)=-0.87
let A(4,3)=-31.0
let A(4,5)=15.3
let A(5,6)=1
let A(6,2)=-0.8
let A(6,3)=53.2
let A(6,5)=-36.15

let B(2,1)=0.4
let B(4,1)=0.43
let B(6,1)=0.4

let s=-1.8+0.1*i
for ii=1 to 6

let K(1,1)=1
let K(1,2)=1
let K(1,3)=1
let K(1,4)=1
let K(1,5)=1
let K(1,6)=1

mat BK=B*K
mat D=A+BK
mat Is=s*IDN(6)
mat IS_D=Is-D
let PPP1=det(IS_D)
let RPP1=Re(PPP1)
let IPP1=Im(PPP1)

let K(1,ii)=0
mat BK=B*K
mat D=A+BK
mat Is=s*IDN(6)
mat IS_D=Is-D
let PPP2=det(IS_D)
let RPP2=Re(PPP2)
let IPP2=Im(PPP2)
let AAA(1,ii)=RPP1-RPP2
let AAA(2,ii)=IPP1-IPP2

next ii

let K(1,1)=0
let K(1,2)=0
let K(1,3)=0
let K(1,4)=0
let K(1,5)=0
let K(1,6)=0

let s=-2+8.0*i
for ii=1 to 6

let K(1,1)=1
let K(1,2)=1
let K(1,3)=1
let K(1,4)=1
let K(1,5)=1
let K(1,6)=1

mat BK=B*K
mat D=A+BK
mat Is=s*IDN(6)
mat IS_D=Is-D
let PPP1=det(IS_D)
let RPP1=Re(PPP1)
let IPP1=Im(PPP1)

mat BK=B*K
mat D=A+BK
mat Is=s*IDN(6)
mat IS_D=Is-D
let PPP2=det(IS_D)
let RPP2=Re(PPP2)
let IPP2=Im(PPP2)
let AAA(5,ii)=RPP1-RPP2
let AAA(6,ii)=IPP1-IPP2

next ii

let K(1,1)=0
let K(1,2)=0
let K(1,3)=0
let K(1,4)=0
let K(1,5)=0
let K(1,6)=0

let s=-2+2.0*i
for ii=1 to 6

let K(1,1)=1
let K(1,2)=1
let K(1,3)=1
let K(1,4)=1
let K(1,5)=1
let K(1,6)=1

mat BK=B*K
mat D=A+BK
mat Is=s*IDN(6)
mat IS_D=Is-D
let PPP2=det(IS_D)
let RPP2=Re(PPP2)
let IPP2=Im(PPP2)
let AAA(3,ii)=RPP1-RPP2
let AAA(4,ii)=IPP1-IPP2

next ii

let K(1,1)=0
let K(1,2)=0
let K(1,3)=0
let K(1,4)=0
let K(1,5)=0
let K(1,6)=0

mat BK=B*K
mat D=A+BK
mat Is=s*IDN(6)
mat IS_D=Is-D
let PPP2=det(IS_D)
let RPP2=Re(PPP2)
let IPP2=Im(PPP2)
let BBB(5,1)=-RPP2
let BBB(6,1)=-IPP2

mat print AAA
mat print BBB

mat CCC=inv(AAA)
mat K=CCC*BBB

mat print K

END

```

## プリント結果

-118.473582	212.2905312	-74.71441	133.604046	-118.514024	211.9597764
9.6191640	-29.1618534	8.81891999	-23.345497	13.654668	-36.4298048
-10.7933050	-364.58779	27.2678399	-401.928	25.098640	-615.616
193.0872	-407.76101	173.69616	-292.85664	282.70936	-515.22144
381.360694	5346.48821	193.3778400	7279.92720	1085.6586399	1069.9832
-763.6512	4578.18796	-958.3353599	3463.69344	-405.16255999	9495.59424
-1293.8188692					
219.7246194					
3566.67849					
1130.77431					
-112171.67751					
73920.10524					
-48.5803638883592					
-79.1122244385317					
-174.918366971744					
33.3752838702591					
94.7013612216858					
16.2337942780032					