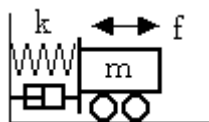


## 状態方程式と倒立振り子

振動と状態方程式 State variable equation



質量・バネ・ダンパーシステムにおいて、運動方程式は

$$\frac{dx}{dt} = v \quad ,$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-kx}{m} + \frac{-bv}{m} + \frac{f}{m}$$

であらわされる。したがって、

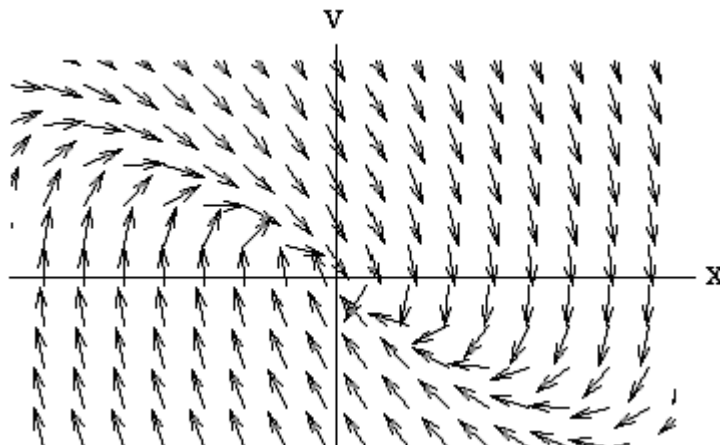
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \cdot f$$

と書くことができる。これを状態方程式という。ここで、

$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$  を状態変数 (State variables) といい、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}$  を状態行列といおう。

位相平面 (Phase plane)

横軸に  $x$ 、縦軸に  $v$  をとり、行列  $A$  の方向場をかかせる。ダンパ定数  $b$  が 0 にならない限り、方向場は左のようになり、状態平面のいかなる点の状態から出発しても、状態変数  $(x, v)$  は原点に収束することがわかる。



位相平面をかかせるためのプログラム

!方向 01.bas 03-11-4

!行列が作り出す方向場

```
set window -5,5,-5,5
draw grid with scale (1,1)
```

```
dim A(2,2),V(2),W(2)
let m=1
let k=1
let b=1.8
```

```
let A(1,2)=1
let A(2,1)=-k/m
let A(2,2)=-b/m
```

```
mat print A
```

```
set line color 2
for x=-4.5 to 4.5 step 0.401
for y=-4.5 to 4.5 step 0.401
```

```
let V(1)=x
```

```
let V(2)=y
```

```
mat W=A*V
```

```
let vx=W(1)
let vy=W(2)
```

```
let theta=angle(vx,vy)
draw arrow with rotate(theta)*shift(x,y)
next y
next x
END
```

```
!-----
external picture arrow
option angle degrees
plot 0.4,0;0,0
plot 0.4,0;0.3-0.1,0.05
plot 0.4,0;0.3-0.1,-0.05
end picture
```

伝達関数 ( Transfer function )

先の状態方程式

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot f$$

において、演算子  $\frac{d}{dt} = s$  を導入して(ラプラス変換して)書きなおすと下のようになる。

$$s \cdot \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot F$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix}$ であったから、 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、

$$s \cdot I - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s - \frac{b}{m} \end{pmatrix}$$

となり、下がえられる。

$$\begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot F \quad \circ$$

そして、

$$(s \cdot I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ms+b}{ms^2+bs+k} & \frac{m}{ms^2+bs+k} \\ \frac{-k}{ms^2+bs+k} & \frac{ms}{ms^2+bs+k} \end{pmatrix}$$

だから、伝達関数(インパルス1の応答)  $G = \frac{X}{F}$  は下のようになる。

$$G = \frac{1}{ms^2+bs+k} \quad \circ$$

$ms^2+bs+k=0$  (これを特性方程式 Characteristic equation と呼ぶ) の根の位置  
伝達関数の分母が0となるような  $s$  の値(根)をの位置を複素平面上に探ることによって、このシステムの性質を知ることができる。

特性方程式が虚根を有する場合、すなわち根が  $\lambda \pm i \cdot \omega$  の場合、状態方程式(微分方程式)の  $f=0$  にたいする解はシステムの性質をあらわし、

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot (c_1 \cos(\omega \cdot t) + c_2 \sin(\omega \cdot t))$$

となる。虚部からくる  $(c_1 \cos(\omega \cdot t) + c_2 \sin(\omega \cdot t))$  は角周波数  $\omega$  の振動をあらわす項で、実部からくる  $e^{\lambda t}$  は  $\lambda > 0$  のときは増大し、 $\lambda < 0$  のときは減少することを示す。

特性方程式が実根を有する場合、すなわち根が  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  の場合、状態方程式(微分方程式)の  $f=0$  にたいする解は

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

となる。

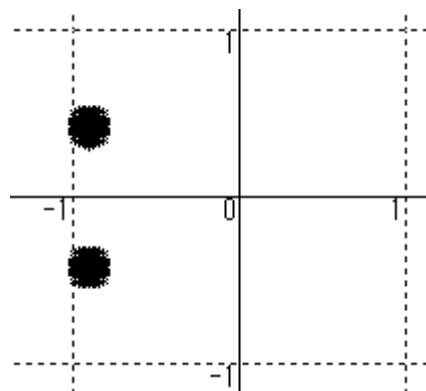
いずれによ、特性方程式の解が複素数平面において左半分に存在すればそのシステムはいつかは安定する性質があり、右半分に存在すれば発散し不安定になる運命にある。

特性方程式の根を求める問題は、伝達関数までつき進まなくとも、状態行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \text{ の固有値を求める問題に帰し、 } s \cdot I - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s - \frac{b}{m} \end{pmatrix} \text{ の行列}$$

式  $|s \cdot I - A| = 0$  を解く問題となるが、十進 BASIC では行列、行列式が直接扱えるので、次のプログラムで見当をつけることができる。

```
!状態 01.bas 2nd order system
option arithmetic complex
set window -2,2,-2,2
draw grid with scale(1,1)
dim A(2,2),IS(2,2),IS_A(2,2)
let m=1
let k=1
let b=1.8
let A(1,2)=1
let A(2,1)=-k/m
let A(2,2)=-b/m
let i=complex(0,1)
```



```

for x=-5 to 2 step 0.02
  for y=-2 to 2 step 0.02
    let s=x+i*y
    mat Is=s*IDN(2)
    mat IS_A=Is-A
    let PPP=det(IS_A)
    if 1/abs(PPP)>10 then
      plot points:x,y
    end if
  next y
next x
END

```

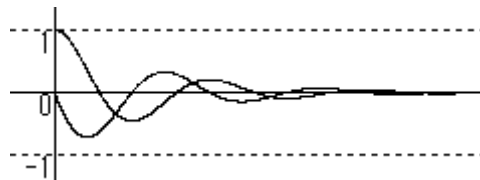
## 状態方程式からシミュレーション 1

### 先の状態方程式

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot f$$

において、 $f=0$  としよう。状態変数を  $x(1)=x$ 、 $x(2)=v$  とする。

初期値  $x(1)=1$ 、 $x(2)=0$  を与えてこのシステムの挙動をシミュレートしよう。



```
!シミ 01.bas 03-11-4
```

```

set window -1,20,-4,4
draw grid with scale(1,1)
dim A(2,2),V(2),W(2),x(2),dx(2),Ax(2),C(2)
let m=1
let k=1
let b=0.5

let A(1,2)=1
let A(2,1)=-k/m
let A(2,2)=-b/m

```

```
let dt=0.01
```

```
let x(1)=1
```

```

for t=0 to 50 step dt
  mat Ax=A*x
  mat C=Ax
  mat dx=dt*C
  mat x=x+dx
  set line color 1
  plot lines:t,x(1)
  set line color 2
  plot lines:t,x(2)
next t

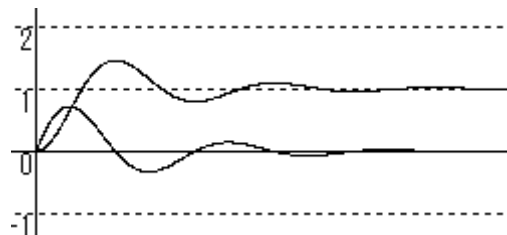
```

```
END
```

## 状態方程式からシミュレーション 2

先の状態方程式

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \cdot f$$

において、 $f=1$ （ステップインプット）とする。状態変数を  $x(1)=x$ 、 $x(2)=v$  とする。シミュレートしよう。

!シミ 02.bas 03-11-4

```
set window -1,20,-4,4
draw grid with scale(1,1)
dim
```

```
A(2,2),V(2),W(2),x(2),dx(2),Ax(2),C(2),BB(2)
```

```
let m=1
```

```
let k=1
```

```
let b=0.5
```

```
let f=1
```

```
let A(1,2)=1
```

```
let A(2,1)=-k/m
```

```
let A(2,2)=-b/m
```

```
let BB(2)=1/m
```

```
let dt=0.01
```

```
for t=0 to 50 step dt
```

```
mat Ax=A*x
```

```
mat BB=f*BB
```

```
mat C=Ax+BB
```

```
mat dx=dt*C
```

```
mat x=x+dx
```

```
set line color 1
```

```
plot lines:t,x(1)
```

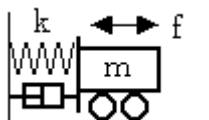
```
set line color 2
```

```
plot lines:t,x(2)
```

```
next t
```

```
END
```

ベクトル軌跡 Vector plot



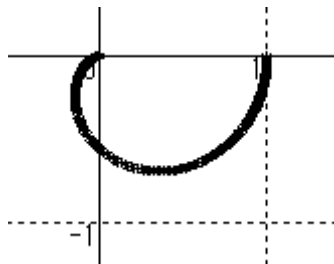
において、インプット（力  $F$ ）にたいするアウトプット  $X$  の  
伝達関数は

$$G = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

であった。  $s$  に  $i$  を代入すると周波数伝達関数は下のようになる。

$$G(i \cdot \omega) = \frac{1}{m \cdot (i \cdot \omega)^2 + b \cdot (i \cdot \omega) + k} \quad \circ$$

インプット  $F$  を周期関数として、その振動数を  $\omega$  とするとき、複素平面にベクトル軌跡を描かせると、その振動にたいするアウトプットのゲイン（振幅の倍率）と位相の遅れを知ることができる。



!ベクトル軌跡

!ベク 01.bas by T.Uede 03-11-09

option arithmetic complex

set window -2,2,-2,2

draw grid with scale (1,1)

let m=1

let k=1

let b=1.8

for i=-300 to 300

let w=10^(i/100)

let s=complex(0,w)

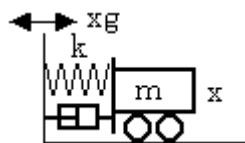
let G=1/(m\*s^2+b\*s+k)

plot points:Re(G),Im(G)

next i

END

ベースが動く場合



質量・バネ・ダンパーシステムにおいて、図のように壁の動きが入力となる場合の運動方程式は

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-k(x - x_G)}{m} + \frac{-b(v - \dot{x}_G)}{m}$$

であらわされる。したがって状態方程式は

$$s \cdot \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ bs+k \end{pmatrix} \cdot X_G$$

となり、 $s \cdot I - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ k & s - \frac{b}{m} \end{pmatrix}$  とおくと、下がえられる。

$$\begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ bs+k \end{pmatrix} \cdot X_G \quad .$$

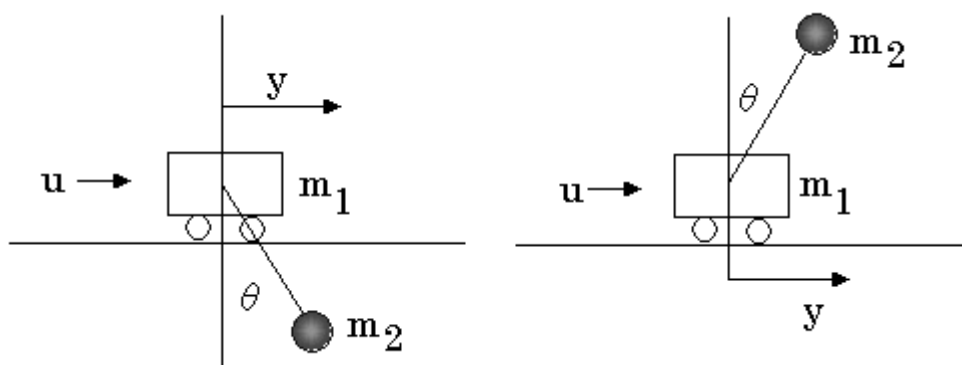
$$(s \cdot I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ms+b}{ms^2+bs+k} & \frac{m}{ms^2+bs+k} \\ \frac{-k}{ms^2+bs+k} & \frac{ms}{ms^2+bs+k} \end{pmatrix}$$

だから、伝達関数（インパルス 1 の応答） $G = \frac{X}{X_G}$  は下のようになる。

$$G = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k} \quad .$$

s に  $i$  を代入し、インプット  $X_G$  が振動数とする周期関数の場合、複素平面に出力のベクトル軌跡を描かせよ。

### 振り子と倒立振り子



(1) クレーンのトロリー

(2) 逆さ振り子



上の図は(1)クレーンのトロリーと(2)逆さ振子のコントロールするモデルである。

まず、運動方程式をたてよう。

(1)

$$m_2 \ddot{y} + m_2 L \ddot{\theta} = -m_2 g \theta$$

$$\therefore L \ddot{\theta} = -g \theta - \ddot{y}$$

$$m_1 \ddot{y} = u - m_2 \ddot{y} - m_2 L \ddot{\theta}$$

$$\therefore \ddot{y} = \frac{u}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 L \ddot{\theta}}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \frac{-g}{L} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \theta - \frac{u}{m_1 L}$$

$$\therefore \ddot{y} = \frac{u}{m_1} + \frac{m_2 g \theta}{m_1}$$

(2)

$$m_2 \ddot{y} + m_2 L \ddot{\theta} = m_2 g \theta$$

$$\therefore L \ddot{\theta} = g \theta - \ddot{y}$$

$$m_1 \ddot{y} = u - m_2 \ddot{y} - m_2 L \ddot{\theta}$$

$$\therefore \ddot{y} = \frac{u}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 L \ddot{\theta}}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \frac{g}{L} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \theta - \frac{u}{m_1 L}$$

$$\therefore \ddot{y} = \frac{u}{m_1} - \frac{m_2 g \theta}{m_1}$$

上から、状態方程式をつくると次のようになる。

(1)クレーンのトロリーでは

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 g}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{L} \frac{m_1 + m_2}{m_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{-1}{m_1 L} \end{pmatrix} \cdot u \quad .$$

(2)逆さ振子では

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-m_2 g}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{L} \frac{m_1 + m_2}{m_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{m_1 L} \end{pmatrix} \cdot u \quad .$$

両者のシステムマトリクスの固有値をもとめ、システムの安定性を考えよ。