

データポイント

x	1	2	3	4	5
y	1.8	2.7	3.4	3.8	3.9

にたいする近似方程式 $y = b_1 + b_2x + b_3x^2$ を最小2乗法によって求めるには、データから

$$\text{デザインマトリクス } U = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} \quad \text{観測点ベクトル } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

を作っておいて、パラメタマトリックス $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (U^T \cdot U)^{-1} \cdot U^T \cdot y$ を求めればよい。

問題1 .

データポイント

x	44	61	81	113	131
y	91	98	103	110	112

にたいする近似方程式 $y = b_1 + b_2 \log_e x$ を最小2乗法によって求めたい。

- (1) デザインマトリクスを作れ。
- (2) パラメタマトリクスをもとめるためのプログラムを作れ。

問題2 .

データポイント

x	1	2	3
y	7.9	5.4	-9

にたいする近似方程式 $y = b_1 \cos x + b_2 \sin x$ を最小2乗法によって求めたい。

- (1) デザインマトリクスを作れ。
- (2) パラメタマトリクスをもとめるためのプログラムを作れ。

自習課題 機械工学科4年 番号() 名前()

問題3.

データポイント

	0.88	1.10	1.42	1.77	2.14
r	3.00	2.30	1.65	1.25	1.01

にたいする近似方程式 $r = \beta + k(r \cos \theta)$ を最小2乗法によって求めたい。

- (1) デザインマトリクスを作れ。
- (2) パラメタマトリクスをもとめるためのプログラムを作れ。

最小二乗法の公式の直感的理解方法

4個のデータポイントにたいする近似方程式 $y = b_1 \cos x + b_2 \sin x$ を最小2乗法によって求める。

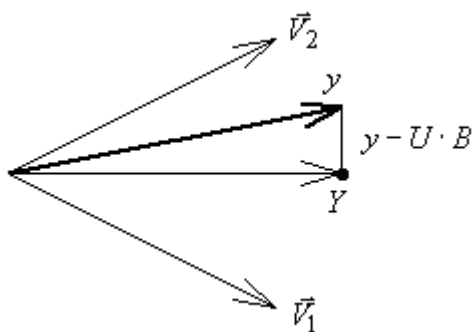
デザインマトリクス $U = \begin{pmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 \\ \cos x_2 & \sin x_2 \\ \cos x_3 & \sin x_3 \\ \cos x_4 & \sin x_4 \end{pmatrix}$ 観測点ベクトル $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ とする。

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ にたいする近似方程式による y の値のベクトルを $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$ とし、パラメタマトリクスを

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると、 $Y = U \cdot B$ である。

y の値のベクトルと観測点ベクトルの差、すなわち、誤差ベクトルは $y - Y = \begin{pmatrix} y_1 - Y_1 \\ y_2 - Y_2 \\ y_3 - Y_3 \\ y_4 - Y_4 \end{pmatrix}$ で、これ

は $y - Y = y - U \cdot B$ とあらわすことができる。



デザインマトリクスを形成する2個のベクトル $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \cos x_2 \\ \cos x_3 \\ \cos x_4 \end{pmatrix}$ と $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ \sin x_2 \\ \sin x_3 \\ \sin x_4 \end{pmatrix}$ の作る平面は、ベ

クトル Y をふくむが、 y はこの平面外にあって、誤差ベクトル $y - Y = y - U \cdot B$ は、この平面への垂線となる場合がもっとも絶対値が小さくなる。

すなわち、2個のベクトル $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \cos x_2 \\ \cos x_3 \\ \cos x_4 \end{pmatrix}$ と $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ \sin x_2 \\ \sin x_3 \\ \sin x_4 \end{pmatrix}$ と $y - Y = y - U \cdot B$ は直交する。

ゆえに、 $\vec{V}_1 \cdot (y - U \cdot B) = 0$ と $\vec{V}_2 \cdot (y - U \cdot B) = 0$

これら2個の方程式をまとめて書くと

$$\begin{pmatrix} \cos x_1 & \cos x_2 & \cos x_3 & \cos x_4 \\ \sin x_1 & \sin x_2 & \sin x_3 & \sin x_4 \end{pmatrix} \cdot (y - U \cdot B) = U^T \cdot (y - U \cdot B) = 0$$

ゆえに、 $U^T y - U^T U \cdot B = 0$

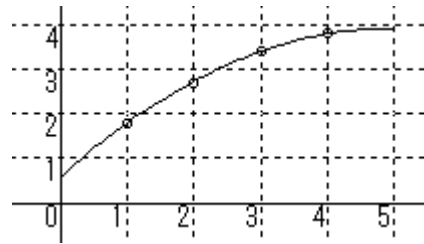
したがって、 $B = (U^T U)^{-1} \cdot U^T \cdot y$

```

!least02a.bas 05-9-5
!最小 2 乘法
!y=b1+b2*x+b3*x^2

set window -2,10,-2,16
set axis color 1
draw grid with scale(1,1)

```



```

dim x(5),y(5),B(3),U(5,3),UT(3,5),UTU(3,3),UTY(3),D(3,3)

```

```

data 1,2,3,4,5
mat read x

```

```

data 1.8,2.7,3.4,3.8,3.9
mat read y

```

```

for i=1 to 5
  let U(i,1)=1
  let U(i,2)=x(i)
  let U(i,3)=x(i)^2
next i

```

```

B(1)=      B(2)=      B(3)=
.58
1.34428571428555
-.13571428

```

```

mat UT=trn(U)
mat UTU=UT*U
mat UTY=UT*y
mat D=inv(UTU)

```

```

mat B=D*UTY

```

```

print "B(1)=      ";"B(2)=      ";"B(3)="
mat print B

```

```

!draw graph
for v=0 to 5 step 0.1
  plot lines:v,B(1)+B(2)*v+B(3)*v^2;
next v

```

```

!plot points
set point style 4
for i=1 to 4
  plot points:x(i),y(i)
next i

```

```

END

```

```
!least02b.bas 05-9-5
```

```
!最小 2 乘法
```

```
!y=b1+b2*log(x)
```

```
set window -20,150,-20,150
```

```
set axis color 1
```

```
draw grid with scale(10,10)
```

```
dim x(5),y(5),B(2),U(5,2),UT(2,5),UTU(2,2),UTY(2),D(2,2)
```

```
data 44,61,81,113,131
```

```
mat read x
```

```
data 91,98,103,110,112
```

```
mat read y
```

```
for i=1 to 5
```

```
  let U(i,1)=1
```

```
  let U(i,2)=log(x(i))
```

```
next i
```

```
mat UT=trn(U)
```

```
mat UTU=UT*U
```

```
mat UTY=UT*y
```

```
mat D=inv(UTU)
```

```
mat B=D*UTY
```

```
print "B(1)=          "; "B(2)=
```

```
"
```

```
mat print B
```

```
!draw graph
```

```
for v=40 to 130 step 0.1
```

```
  plot lines:v,B(1)+B(2)*log(v);
```

```
next v
```

```
!plot points
```

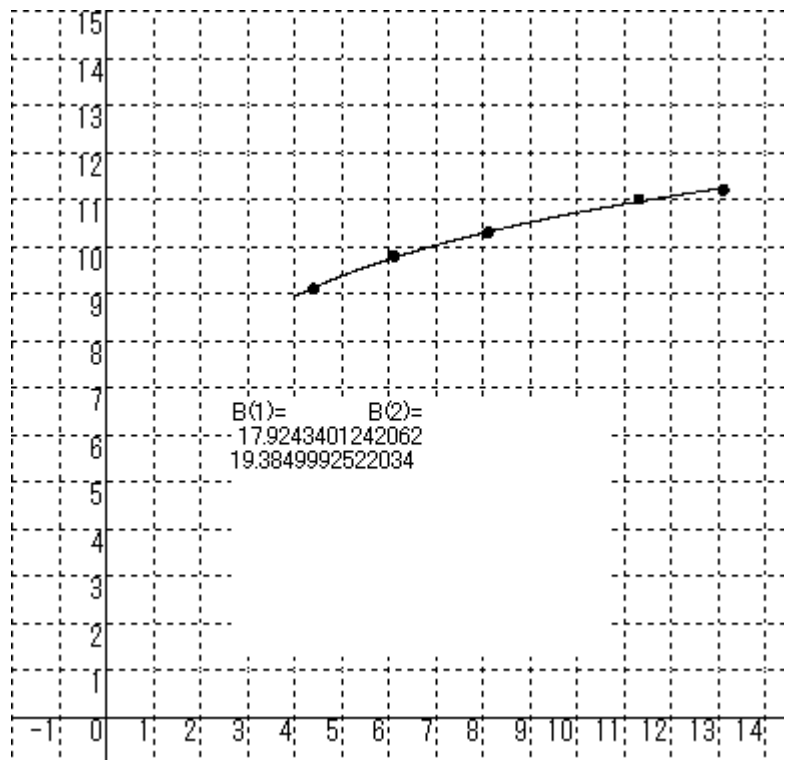
```
set point style 4
```

```
for i=1 to 5
```

```
  draw disk with scale(1)*shift(x(i),y(i))
```

```
next i
```

```
END
```



```
!least02c.bas 05-9-5
```

```
!最小 2 乘法
```

```
!y=b1*cos(x)+b2*sin(x)
```

```
set window -1,4,-20,20
```

```
set axis color 1
```

```
draw grid with scale(1,2)
```

```
dim x(3),y(3),B(2),U(3,2),UT(2,3),UTU(2,2),UTY(2),D(2,2)
```

```
data 1,2,3
```

```
mat read x
```

```
data 7.9,5.4,-9
```

```
mat read y
```

```
for i=1 to 3
```

```
    let U(i,1)=cos(x(i))
```

```
    let U(i,2)=sin(x(i))
```

```
next i
```

```
mat UT=trn(U)
```

```
mat UTU=UT*U
```

```
mat UTY=UT*y
```

```
mat D=inv(UTU)
```

```
mat B=D*UTY
```

```
print "B(1)=          "; "B(2)=          "  
mat print B
```

```
!draw graph
```

```
for v=0 to 4 step 0.1
```

```
    plot lines:v,B(1)*cos(v)+B(2)*sin(v);
```

```
next v
```

```
!plot points
```

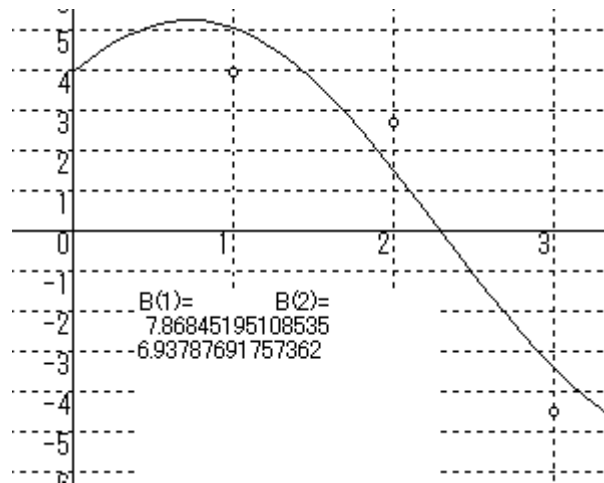
```
set point style 4
```

```
for i=1 to 3
```

```
    plot points:x(i),y(i)
```

```
next i
```

```
END
```



```
!least02d.bas 05-9-5
!最小 2 乘法
!y=b1+b2*(y*cos(x))
```

```
set window -1,4,-1,4
set axis color 1
draw grid with scale(1,2)
```

```
dim x(5),y(5),B(2),U(5,2),UT(2,5),UTU(2,2),UTY(2),D(2,2)
```

```
data 0.88,1.1,1.42,1.77,2.14
mat read x
```

```
data 3.0,2.3,1.65,1.25,1.01
mat read y
```

```
for i=1 to 3
  let U(i,1)=1
  let U(i,2)=y(i)*cos(x(i))
next i
```

```
mat UT=trn(U)
mat UTU=UT*U
mat UTY=UT*y
mat D=inv(UTU)
```

```
mat B=D*UTY
```

```
print "B(1)=          "; "B(2)=
"
```

```
mat print B
```

```
!draw graph
for v=0.5 to 3 step 0.1
  plot lines:v,B(1)/(1-B(2)*cos(v));
next v
```

```
!plot points
set point style 4
for i=1 to 5
  plot points:x(i),y(i)
next i
```

```
END
```

