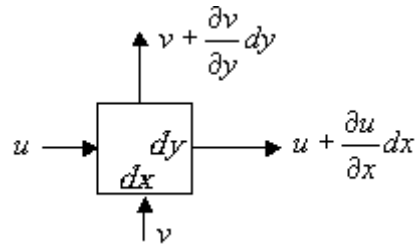


第 1 4 章 発散

2次元での発散 Divergence

2次元のベクトル場 $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ がある。例えば2流体で u, v が平面内のある座標 (x, y) における、流れの速度 Velocity の x 成分と y 成分と想像してもよい。



(x, y) において、きわめて小さな面積 $dx dy$ から、流出する流体の流量から、流入する流体の流量を差し引いたものは、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

であらわされる。

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

で定義されるスカラー量をベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の発散という。

発散は下のように書かれる場合も多い。

$$\nabla \cdot V$$

なお、2次元完全流体において、 $\text{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ は連続の式と呼ばれている。

1 4 . 1

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ \frac{2y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \quad \text{の発散をもとめよ。}$$

(ヒント)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{を使う。} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 + y^2) - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ゆえに、原点を除く場所では $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

原点では今のところわからない。あとで学ぶ

1 4 . 2

ベクトル場の例として下のような関数であらわされるものがある。

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このベクトル場の発散をもとめよ。

1 4 . 3 2D 流体のある領域 D で、次の式は何を意味するか。

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

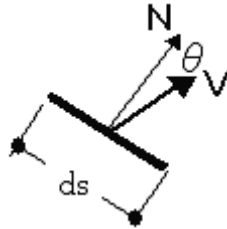
(答え) 領域 D 内の発散の総和。

2次元での発散 Divergence とフラックス Flux (たば)

1 4 . 4 2D の Vector field $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の発散の定義をのべよ。

(答え) $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$

14.5 境界線 Boundary のきわめて小さな、長さ ds の切片 Segment をとる。2D 流体がその小片を $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の速度ベクトルで通過する。



小片の単位法線ベクトルが $\hat{N} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ であらわされる。小片を流れて出る流量はいくらか？

(答え) $dQ = \vec{v} \cdot \hat{N} ds$

14.6 上の切片 ds の x 成分、 y 成分を dx 、 dy とするとき、下を証明せよ。

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \frac{1}{ds} \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

(ヒント) $\hat{N} \perp d\vec{r}$ $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ $\hat{N} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ $|d\vec{r}| = ds$ $\hat{N} \cdot d\vec{r} = 0$

ゆえに $n_x dx + n_y dy = 0$ $\frac{n_x}{n_y} = \frac{dy}{-dx}$ 。 $\begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$ の単位ベクトルは $\frac{1}{ds} \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$ である。

14.7 2D 流体のある Region D をかこむ Boundary を C とするとき、次の式は何を意味するか。

$$\oint_C \vec{v} \cdot \hat{N} ds = \oint_C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} ds = \oint_C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} \frac{1}{ds} ds = \oint_C (u dy - v dx)$$

(答え) 領域 D の境界 C から出てゆく束。

14.8 次の式は発散形式でのグリーンの定理と呼ばれる。この式を自分の言葉で説明せよ。

$$\oint_C (u dy - v dx) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

(ヒント) 領域Dの発散の総和の面積分は境界Cから出る束の線積分にひとしい。

14.9 Use Green's Theorem to find the outward flux of the vector field across the boundary of the region D: the solid circle $x^2 + y^2 = 1$.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

(ヒント) 極座標を使うと簡単。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cdot d\theta \\ \cos \theta \cdot d\theta \end{pmatrix}$$

$$\iint_D (\operatorname{div} \vec{V}) dx dy = \oint_C (u dy - v dx) = \oint_C (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = 2\pi$$

このベクトル場で領域から原点をのぞくと、「連続の式」を満たしているから、発散は $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ で、この積分は $\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0$ となるはずだがそうは

問屋がおろさない。

線積分で $\oint_C (u dy - v dx) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$ の左辺が 2 と出た。

したがって、右辺は特異点を含む領域では 2 にならなければならない。

そう！ 原点（特異点）には、積分すると 2 になる Source がある。これはディラックのデルタ関数というやつに係数をかけたヤツで、インパルスとも呼ばれている。

$$(1) x \neq 0, y \neq 0 \text{ のとき } \delta(x, y) = 0$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1$$

という針のような関数で、イメージとしては

