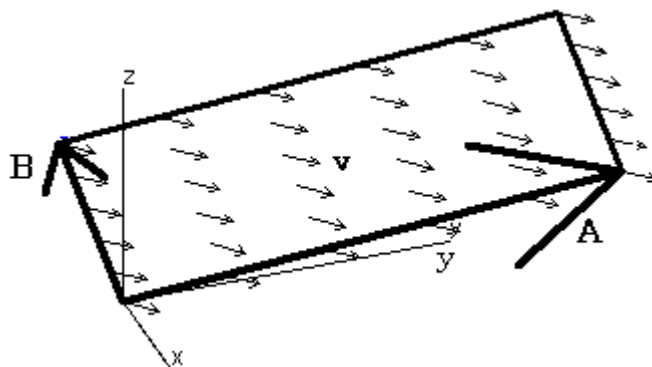


### 第 1 3 章 フラックス (たば)

1 3 . 1



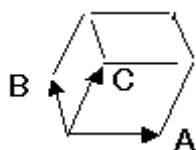
flux02.bas

川の水が Velocity  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$  m/s で流れる。流れの中に、2 辺が Vector

$\vec{A} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 2 \end{pmatrix}$  m の平行四辺形 Parallelogram のスクリーン Screen

が置かれている。この Screen を通過する流量 Flow rate [m3/s] はいくらか。

(Hint) 復習問題 Show that  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ .



$$\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{bmatrix} -0.5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = 1.8 \text{ m}^3/\text{s}$$

1 3 . 2 水が流量分布  $B_x = 3xy$  liters/min/m<sup>2</sup> で x 方向に流れる。水流に直角におかれた長方形 (0, 0, 0)、(0, 3, 0)、(0, 3, 2)、(0, 0, 2) m の Screen を通る水の Flow rate [liters/min] はいくらか

(Hint) 図を描け。この Screen は幸いに、流れの方向 ( x 軸 ) に垂直に置かれている。

$$Q = \int_0^2 \int_0^3 3yz \cdot dydz = \int_0^2 \left[ \frac{3}{2} y^2 \right]_0^3 z dz = \frac{27}{2} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 27 \text{ liters/min}$$

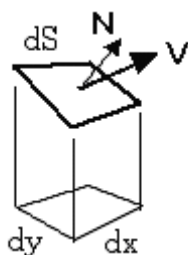
1 3 . 3 平面  $x=0$ 、 $x=2$ 、 $y=0$ 、 $y=4$ 、 $z=0$ 、 $z=6$  m で囲まれた密度分布が  $\rho = 5xyz$  kg/m<sup>3</sup> の立体がある。立体全体の質量 Mass を求めよ。

(Hint)

$$M = \int_0^6 \int_0^4 \int_0^2 5xyz \cdot dx dy dz = \int_0^6 \int_0^4 \left[ \frac{5}{2} x^2 \right]_0^2 yz dy dz = 10 \int_0^6 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^4 z dz$$

$$= 80 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^6 = 1440$$

平面の法線と流速ベクトル ( しばしば flux )



平面の法線単位ベクトル Normal unit vector を  $\hat{N} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$  流速ベクトル Velocity

vector を  $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$  とする。

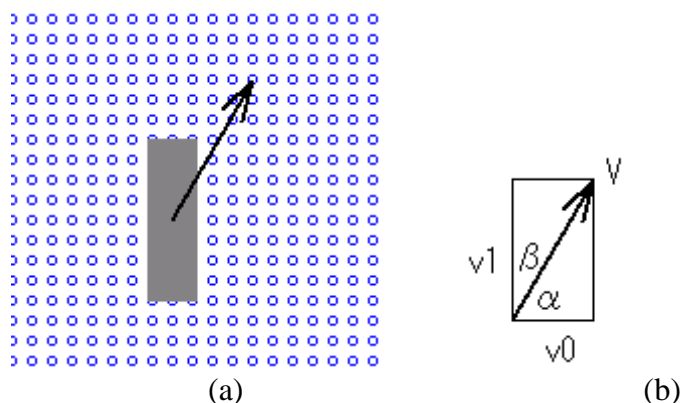
平面を垂直に通る流量は法線単位ベクトル Normal unit vector と流速ベクトル Velocity vector の内積 Dot product である。

したがって、微小な面積  $ds$  を通る流量 Flow rate は、 $\hat{N}$  と  $\vec{V}$  のなす角を  $\theta$  とすると、

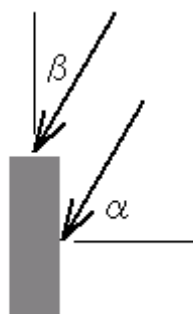
$$dQ = \vec{V} \cdot \hat{N} \cdot ds = |\vec{V}| \cos \theta \cdot ds \quad .$$

13.4 1時間に36mmの割合で雨が垂直に降っている。ある人が傘なしで500mの距離をゆかなくてはならない。その人を幅60cm、奥行き25cm、高さ170cmの箱状と近似して、進行速度4km/h---20km/hに対する濡れ具合を計算してグラフに描け。ただし、雨の落下速度は3m/sと仮定せよ。

ヒント



まずは次のように考えよう。  
 水滴が静止して浮かんだ空間を箱が矢印の速度で移動している。このとき、頭部が吸い込む水分と腹部が吸い込む水分は単位時間あたりどのような量になるか。  
 速度ベクトル  $V$  の  $x$ 、 $y$  成分を  $v_0$  と  $v_1$  に分けると、頭部は単位時間に単位面積あたり  $kv_1$  の水分を吸収し、腹部は単位時間に単位面積あたり  $kv_0$  の水分を吸収する。ただし、 $k$  は湿気をあらわす係数である。



さて、雨が落下速度  $v_1$  で降る中を、速度  $v_0$  で箱が移動するものとする。箱の吸収する水分は単位時間あたり

$$Q = bwkv_1 + bhkv_0 \quad (\text{m}^3/\text{s})$$

距離  $L$  動くために要する時間は  $L/v_0$  だから、この間に吸収する水分は

$$W = Q \frac{L}{v_0} = bwkL \frac{v_1}{v_0} + bhkL \quad (\text{m}^3)$$

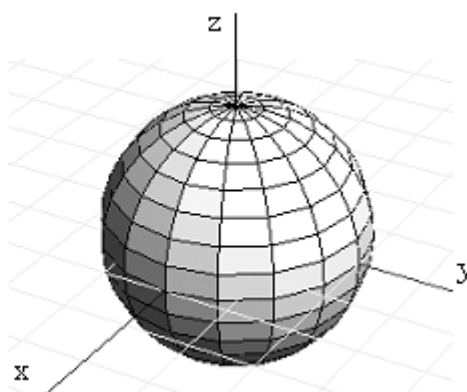
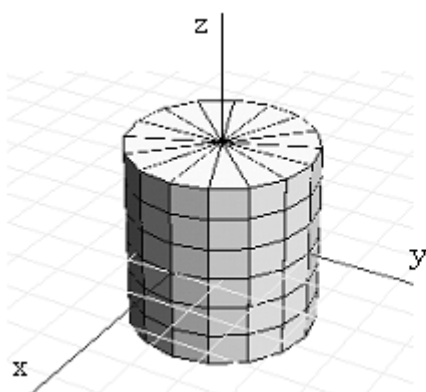
ここで、 $v_1$  は一定だから、 $v_0$  のかわりに  $4v_0$  となった場合、水分を吸収する量は少なくなる。

この問題では、単位面積あたりの雨の量は以下のように与えられている。

$$q = kv_1 \quad (\text{m}^3/\text{s})$$

### 曲面における積分 - 面積分

よく出てくる曲面は円筒形か球面



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

円筒座標による。

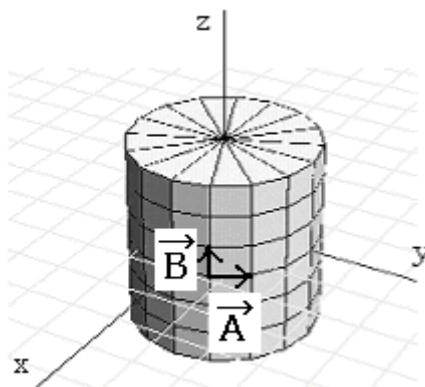
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \end{pmatrix}$$

球座標による。

円筒形、球面では半径は一定だから、 $r = a$  (一定) としよう。

13.13  $xy$  平面上の、原点を中心とする半径  $a$  の円、 $z$  軸を軸として、 $z = -1$  から  $z = 1$  の円柱の側面で、スカラー場  $f = 1$  の曲面での積分を求めよ。

(Hint)  $z$  座標で積分する。座標変換は  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$



$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \quad \vec{B} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz$$

$$\int_S 1 dS = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} 1 \cdot |\vec{A} \times \vec{B}| = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} a d\theta dz = 4\pi a$$

13.14  $xy$  平面上の、原点を中心とする半径  $a$  の円、 $z$  軸を軸とし

て、 $z = -1$  から  $z = 1$  の円柱の側面で、ベクトル場 Vector field  $\vec{f} = \begin{pmatrix} x/a^2 \\ y/a^2 \\ 0 \end{pmatrix}$  の

積分を求めよ。

(Hint)  $z$  座標で積分する。

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \quad \vec{B} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz$$

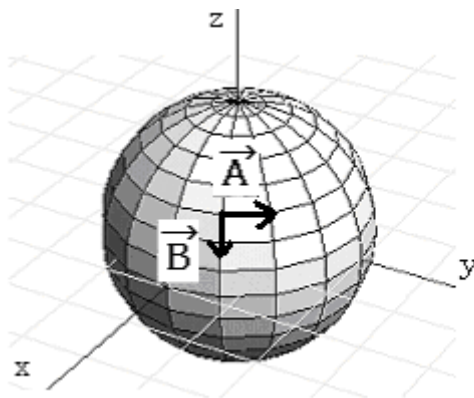
$$\hat{N} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{f} \cdot \hat{N} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{N} = \frac{1}{a}$$

$$\int_S \vec{f} \cdot \hat{N} dS = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a} |\vec{A} \times \vec{B}| = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\theta dz = 4\pi$$

13.15 原点を中心とする半径  $a$  の球面で、スカラー場  $f = 1$  の曲面

での積分を求めよ。

(Hint) 座標で積分する。 はやくいえば、これは球の表面積を求める問題だな。



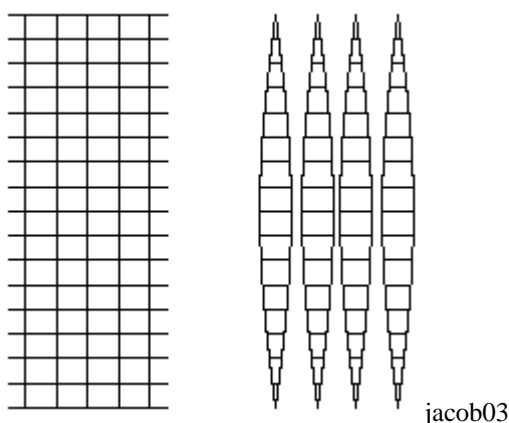
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin \phi \cos \theta \\ a \sin \phi \sin \theta \\ a \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta = \begin{pmatrix} -a \sin \phi \sin \theta \\ a \sin \phi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \quad \vec{B} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi = \begin{pmatrix} a \cos \phi \cos \theta \\ a \cos \phi \sin \theta \\ -a \sin \phi \end{pmatrix} d\phi$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} -a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \\ -a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \\ -a^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \quad \left| \vec{A} \times \vec{B} \right| = \begin{vmatrix} -a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \\ -a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \\ -a^2 \sin \phi \cos \phi \end{vmatrix} d\theta d\phi = a^2 \sin \phi$$

ただし、法線の方法は  $\vec{A} \times \vec{B}$  の反対方向となるので注意 (何故ですか?)

$$\int_S 1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \left| \vec{A} \times \vec{B} \right| = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi \cdot d\phi d\theta = 4\pi a^2$$



メッシュのイメージ

13.16 原点を中心とする半径  $a$  の球で、ベクトル場  $\vec{f} = \begin{pmatrix} x/a^3 \\ y/a^3 \\ z/a^3 \end{pmatrix}$  の面

積分を求めよ。

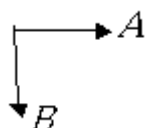
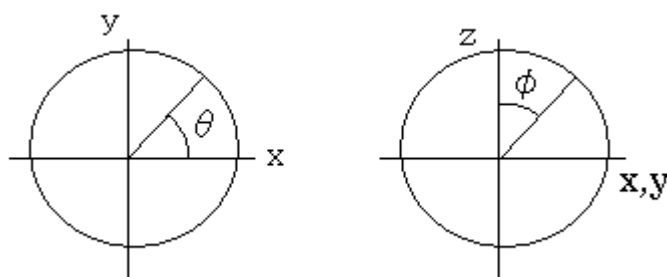
(Hint) はやくいえば、これは原点に電荷、光源、水源、汚染元があり、球面から出てゆく電気力線、光束、流量、汚染量を求める問題、と同じだな。さて、この問題は 座標で積分する。ただし、 $\hat{N}$  の方向は  $\vec{A} \times \vec{B}$  の反対方向となるので注意 (何故ですか?)。

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta = \begin{pmatrix} -a \sin \phi \sin \theta \\ a \sin \phi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \quad \vec{B} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi = \begin{pmatrix} a \cos \phi \cos \theta \\ a \cos \phi \sin \theta \\ -a \sin \phi \end{pmatrix} d\phi$$

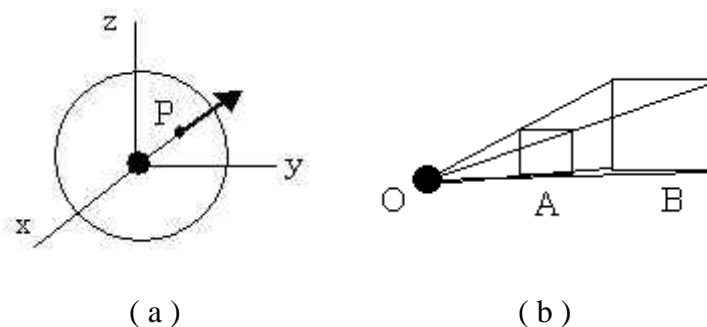
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} -a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \\ -a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \\ -a^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = a^2 \sin \phi$$

$$\hat{N} = -\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad \vec{f} \cdot \hat{N} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \hat{N} = \frac{1}{a^2}$$

$$\int_S \vec{f} \cdot \hat{N} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{a^2} \cdot |\vec{A} \times \vec{B}| = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi d\phi d\theta = 4\pi$$



点源と無限直線源



(a) 図のように、源 (source) が原点にある点の場合、この点源によって作られるベクトル場で、半径  $r$  の球面上の一点  $P(x, y, z)$  におけるベクトルが

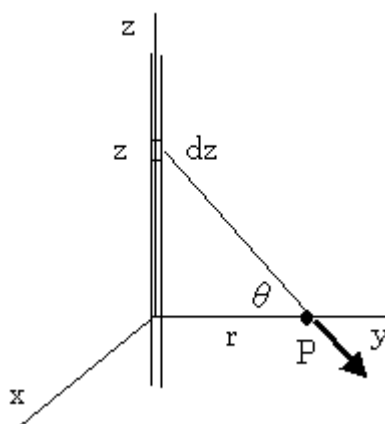
$$\vec{V} = k \frac{\vec{r}}{r^3} = \begin{pmatrix} k \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ k \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ k \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

の形であたえられることがよくある。これは、放射線源、点光源、点電荷、点汚染源、あるいは流体などに適用される。このベクトルの大きさ Magnitude は、(b) 図からイメージされるとおり、

$$|\vec{V}| = k \frac{1}{r^2}$$

で、源からの距離に反比例する。

では、源が  $z$  軸に一致して、無限長さの直線である場合はどうか。



$z$  軸から  $r$  の位置にある点  $P$  におけるベクトルを考えよう。  $dz$  の点源が  $z$  直線上に分布すると考え、 $P$  点におけるベクトルを積分でもとめよう。まず、



x y 平面に対して、線源は対称と考えてよいから、

$$V_z = 0$$

角度  $\theta$  を考えて、半径方向のベクトルの大きさを計算する。

$$dV = k \frac{1}{z^2 + r^2} \cos \theta dz = k \frac{\cos \theta}{\left(\frac{r}{\cos \theta}\right)^2} dz$$

$$z = r \tan \theta \quad dz = \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k \frac{\cos \theta}{\left(\frac{r}{\cos \theta}\right)^2} \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{2k}{r}$$

点 P(x, y, z) の z 軸を中心とした半径方向のベクトル  $\hat{n}$  を掛けて

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{V} = \frac{2k}{r} \hat{n} = \begin{pmatrix} \frac{2kx}{r^2} \\ \frac{2ky}{r^2} \\ \frac{2kz}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2kx}{x^2 + y^2} \\ \frac{2ky}{x^2 + y^2} \\ \frac{2kz}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは、無限長さの直線をなす放射線源、光源、電荷、汚染源、あるいは流体などに適用される。