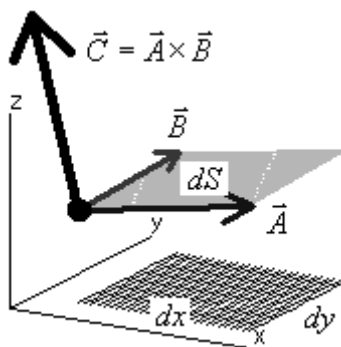


## 第10章 ベクトル

### 10.1

$$(1) \hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \quad \hat{j} \cdot \hat{j} = 1 \quad \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$(2) \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \quad \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = 0.$$



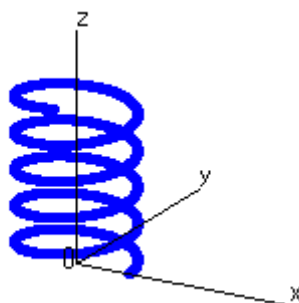
### 10.2

$$(1) \hat{i} \times \hat{i} = 0, \quad \hat{j} \times \hat{j} = 0, \quad \hat{k} \times \hat{k} = 0.$$

$$(2) \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}.$$

曲線(Curve)

### 10.3



サンプルプログラム

```
!curve01.bas 02-7-14
!曲線を描かせる。
let s=50
set window -0.5*s,0.8*s,-0.3*s,s
let dt=0.001
```

```
let a=10
```

```
!-----関数を定義する。
```

```
def xx(t)=a*cos(t)
```

```
def yy(t)=a*sin(t)
```

```
def zz(t)=t
```

```
! 曲線-----
```

```
set line width 5
```

```
set line color 2
```

```
for i=0 to 30000
```

```
  call plotto(xx(t),yy(t),zz(t))
```

```
  let t=t+dt
```

```
next i
```

```
!*****
```

```
plot lines
```

```
set line width 1
```

```
set line color 1
```

```
! 軸-----
```

```
call plotto(0,0,0)
```

```
call plotto(40,0,0)
```

```
call plotto(0,0,0)
```

```
call plotto(0,40,0)
```

```
call plotto(0,0,0)
```

```
call plotto(0,0,40)
```

```
call penup
```

```
call plottext(40,0,0,"x")
```

```
call plottext(0,40,0,"y")
```

```
call plottext(0,0,40,"z")
```

```
call plottext(-2,-1,-2,"0")
```

```
!-----subroutines-----
```

```
sub rotx(x,y,z,a)
```

```
  let y0=y*cos(a)-z*sin(a)
```

```
  let z0=y*sin(a)+z*cos(a)
```

```
  let y=y0
```

```
  let z=z0
```

```
end sub
```

```
sub roty(x,y,z,a)
```

```
  let x0=x*cos(a)+z*sin(a)
```

```
  let z0=-x*sin(a)+z*cos(a)
```

```
  let x=x0
```

```
  let z=z0
```

```
end sub
```

```
sub rotz(x,y,z,a)
```

```
  let x0=x*cos(a)-y*sin(a)
```

```
  let y0=x*sin(a)+y*cos(a)
```

```
  let x=x0
```

```
  let y=y0
```

```
end sub
```

```
sub convert(x,y,z)
```

```
  call rotz(x,y,z,-30*pi/180)
```

```
  call rotx(x,y,z,-70*pi/180)
```

```
end sub
```

```

sub plotto(x,y,z)
  let x1=x
  let y1=y
  let z1=z
  call convert(x1,y1,z1)
  plot lines:x1,y1;
end sub
sub penup
  plot lines
end sub

sub plottext(x,y,z,s$)
  call convert(x,y,z)
  plot text ,at x,y: s$
end sub

END

```

### 速度ベクトルと加速度ベクトル

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}$$

#### 10.4 証明問題

$$(1) \quad \hat{T} \perp \frac{d\hat{T}}{dt}$$

2つの同じ単位ベクトルの内積は1だから、

$$\hat{T} \cdot \hat{T} = 1$$

上の式を微分すると

$$\frac{d}{dt}(\hat{T} \cdot \hat{T}) = 2\hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{dt} = 0$$

ゆえに

$$\hat{T} \perp \frac{d\hat{T}}{dt}$$

$$(2) \quad \hat{N} = \frac{\vec{a} - a_t \hat{T}}{|\vec{a} - a_t \hat{T}|} .$$

速度、接線単位ベクトルと接線加速度  $a_t$  と法線加速度  $a_n$  との関係は

$$\hat{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \qquad a_t = \vec{a} \cdot \hat{T}$$

$$a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T} \quad \because a_n = |\vec{a} - a_t \hat{T}|$$

したがって、

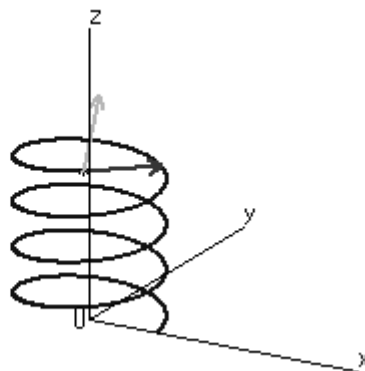
$$\hat{N} = \frac{\vec{a} - a_t \hat{T}}{|\vec{a} - a_t \hat{T}|}$$

$$(3) \quad \hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left| \frac{d\hat{T}}{dt} \right|} .$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}$$

## 10.5

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cdot \cos(t) \\ 10 \cdot \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$$



t = 24 での速度ベクトルと加速度ベクトルは

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\sin(24) \\ 10\cos(24) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\cos(24) \\ -10\sin(24) \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 10.6

曲線の長さは  $s = \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\sin t \\ 10\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{だから上に代入すると} \quad s = \int_0^{24} \sqrt{101} dt = 24\sqrt{101}$$

### 10.7

まず速度は  $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\sin(24) \\ 10\cos(24) \\ 1 \end{pmatrix}$  で、加速度は  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\cos(24) \\ -10\sin(24) \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

接線単位ベクトルは  $\hat{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{101}} \begin{pmatrix} -10\sin(24) \\ 10\cos(24) \\ 1 \end{pmatrix}$

したがって、接線加速度ベクトルは  $a_t = \vec{a} \cdot \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot 0 = 0$

つぎに、法線加速度ベクトルは  $a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T}$  と 本問題での  $a_t = 0$  から、

$$a_n \hat{N} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -10\cos(24) \\ -10\sin(24) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに、} \quad a_n = |\vec{a} - a_t \hat{T}| = 10$$

10.8

速度は  $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega \cdot t) \\ r\omega \cos(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}$  で、加速度は  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega \cdot t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

接線単位ベクトルは  $\hat{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{r\omega} \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega \cdot t) \\ r\omega \cos(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}$

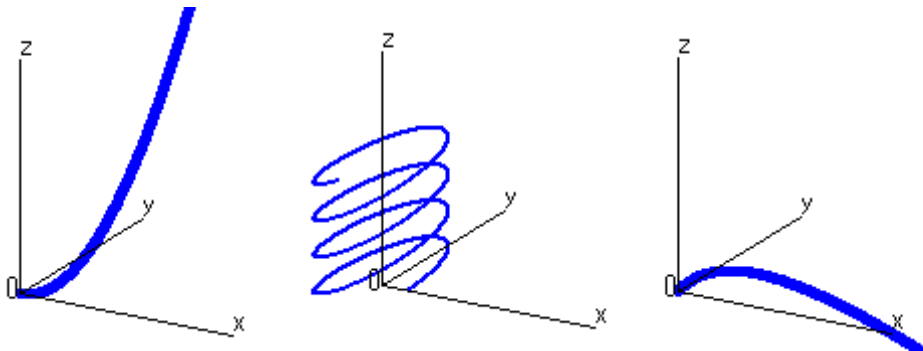
したがって、接線加速度ベクトルは  $a_t = \vec{a} \cdot \hat{T} = \frac{1}{r\omega} \cdot 0 = 0$

つぎに、法線加速度ベクトルは  $a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T}$  と 本問題での  $a_t = 0$  から、

$a_n \hat{N} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega \cdot t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}$  ゆえに、  $a_n = |\vec{a} - a_t \hat{T}| = r\omega^2$

10.9 曲線を描く。

(1)  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{t^2}{10} \\ \frac{t^3}{100} \end{bmatrix}$     (2)  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot \cos(t) \\ 20 \cdot \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$     (3)  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + \frac{t^3}{100} \\ \frac{t^2}{10} \\ t - \frac{t^3}{100} \end{bmatrix}$



10.10

(1)  $t = 24$  において 速度と加速度は

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t/10 \\ 3t^2/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 48/10 \\ 1728/100 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/10 \\ 6t/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/10 \\ 144/100 \end{pmatrix}$$

(2)  $t = 24$  において速度と加速度は

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \sin t \\ 10 \cos t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \sin(24) \\ 10 \cos(24) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cos t \\ -10 \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cos(24) \\ -10 \sin(24) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3)  $t = 24$  において 速度と加速度は

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t^2/100 \\ 2t/10 \\ 1-3t^2/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1828/100 \\ 48/10 \\ 728/100 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t/100 \\ 2/10 \\ -6t/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144/100 \\ 2/10 \\ -144/100 \end{pmatrix}$$

### 10.11

(1)  $t = 24$  において 速度と加速度は

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t/10 \\ 3t^2/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 48/10 \\ 1728/100 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/10 \\ 6t/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/10 \\ 144/100 \end{pmatrix}$$

接線単位ベクトルは  $\hat{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{17.962} \begin{pmatrix} 1 \\ 48/10 \\ 1728/100 \end{pmatrix}$

したがって、接線加速度ベクトルは  $a_t = \vec{a} \cdot \hat{T}$  で結局

$$\frac{1}{17.962} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{48}{10} \\ \frac{1728}{100} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{10} \\ \frac{144}{100} \end{bmatrix} = 1.439 \blacksquare$$

つぎに、法線加速度ベクトルは  $a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T}$  と 本問題での  $a_t = 1.439$  から、

$$a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/10 \\ 144/100 \end{pmatrix} - 1.439 \cdot \frac{1}{17.962} \begin{pmatrix} 1 \\ 48/10 \\ 1728/100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{10} \\ \frac{144}{100} \end{bmatrix} - 1.439 \frac{1}{17.962} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{48}{10} \\ \frac{1728}{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.08 \\ -0.185 \\ 0.056 \end{bmatrix} \blacksquare$$

ゆえに、 $a_n = |\vec{a} - a_t \hat{T}|$  から法線加速度は

$$\left| \begin{bmatrix} -0.08 \\ -0.185 \\ 0.056 \end{bmatrix} \right| = 0.209 \blacksquare$$

(2)  $t=24$  において 速度と加速度は

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \sin t \\ 20 \cos t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \sin(24) \\ 20 \cos(24) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cos t \\ -20 \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cos(24) \\ -20 \sin(24) \\ 0 \end{pmatrix}$$

接線単位ベクトルは  $\hat{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \begin{pmatrix} 0.468 \\ 0.877 \\ 0.103 \end{pmatrix}$

したがって、接線加速度ベクトルは  $a_t = \vec{a} \cdot \hat{T}$  で結局

$$\begin{bmatrix} -5 \cdot \cos(24) \\ -20 \cdot \sin(24) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.468 \\ 0.877 \\ 0.103 \end{bmatrix} = 14.891 \blacksquare$$

つぎに、法線加速度ベクトルは  $a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T}$  と 本問題での  $a_t = 14.891$  から、

$$a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T} = \begin{pmatrix} -5 \cos(24) \\ -20 \sin(24) \\ 0 \end{pmatrix} - 14.891 \cdot \begin{pmatrix} 0.468 \\ 0.877 \\ 0.103 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.09 \\ 5.052 \\ -1.534 \end{pmatrix}$$

ゆえに、 $a_n = |\vec{a} - a_t \hat{T}|$  から法線加速度は



$$\left| \begin{bmatrix} -9.09 \\ 5.052 \\ -1.534 \end{bmatrix} \right| = 10.512 \blacksquare$$

(3) t=24 において 速度と加速度は

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t^2/100 \\ 2t/10 \\ 1-3t^2/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1828/100 \\ 48/10 \\ 728/100 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t/100 \\ 2/10 \\ -6t/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144/100 \\ 2/10 \\ -144/100 \end{pmatrix}$$

接線単位ベクトルは  $\hat{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \begin{pmatrix} 0.733 \\ 0.192 \\ -0.653 \end{pmatrix}$

したがって、接線加速度ベクトルは  $a_t = \vec{a} \cdot \hat{T}$  で結局

$$\begin{bmatrix} 1.44 \\ 0.2 \\ -1.44 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.733 \\ 0.192 \\ -0.653 \end{bmatrix} = 2.034 \blacksquare$$

つぎに、法線加速度ベクトルは  $a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T}$  と 本問題での  $a_t = 2.034$  から、

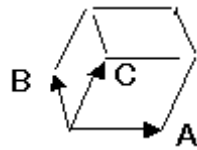
$$a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T} = \begin{pmatrix} 0.144 \\ 0.2 \\ -0.144 \end{pmatrix} - 2.034 \cdot \begin{pmatrix} 0.733 \\ 0.192 \\ -0.653 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.44 \\ 0.2 \\ -1.44 \end{bmatrix} - 2.034 \begin{bmatrix} 0.733 \\ 0.192 \\ -0.653 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.051 \\ -0.191 \\ -0.112 \end{bmatrix} \blacksquare$$

ゆえに、 $a_n = |\vec{a} - a_t \hat{T}|$  から法線加速度は

$$\left| \begin{bmatrix} -0.051 \\ -0.191 \\ -0.112 \end{bmatrix} \right| = 0.227 \blacksquare$$

10.12



上のような、 $\vec{A}$ と $\vec{B}$ と $\vec{C}$ を稜線とする平行6面体を考えよう。

$\vec{B}$ と $\vec{C}$ が底辺(平行四辺形)として、その面積を  $s$  とすると

$$(\vec{B} \times \vec{C}) = s \cdot \hat{e}$$

ただし、 $\hat{e}$  は $\vec{B} \times \vec{C}$ の単位ベクトルである。

また、 $\vec{A}$ の先端から $\vec{B}$ と $\vec{C}$ がつくる底辺におろす垂線の長さを  $h$  とすると、この平行6面体の体積  $V$  は  $V=hs$  である。

しかるに、 $h = \vec{A} \cdot \hat{e}$  だから

$$V = hs = (\vec{A} \cdot \hat{e}) \cdot s = \vec{A} \cdot (s \cdot \hat{e}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

この平行6面体において稜線 $\vec{A}$ と $\vec{B}$ と $\vec{C}$ は平等に扱うことができるから、その体積  $V$  は

$$V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

体積を各ベクトルの成分から計算するには

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

10.13

( 1 )

( 2 )

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

10.14

$t = 0.75 \cdot \pi$  において 速度と加速度は

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sin(2t) \\ 4\cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\cos(2t) \\ -8\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

接線単位ベクトルは  $\hat{T} = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{bmatrix} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0 \\ 0.243 \end{pmatrix}$

したがって、接線加速度ベクトルは  $a_t = \vec{a} \cdot \hat{T}$  で結局 0

つぎに、法線加速度ベクトルは  $a_n \hat{N} = \vec{a} - a_t \hat{T}$  と 本問題での  $a_t = 0$  から、

$$a_n \hat{N} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに、法線加速度の単位ベクトルは

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} Nx \\ Ny \\ Nz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 接線加速度は 0

法線加速度は 8

(3)

2つの同じ単位ベクトルの内積は1だから、

$$\hat{T} \cdot \hat{T} = 1$$

上の式を微分すると

$$\frac{d}{dt}(\hat{T} \cdot \hat{T}) = 2\hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{dt} = 0$$

ゆえに

$$\hat{T} \perp \frac{d\hat{T}}{dt}$$

10.15

流量を  $Q[\text{m}^3/\text{s}]$  とすると、

$$Q = \vec{V} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

ゆえに、

$$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = 0 \quad \blacksquare$$

10.16

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{とし、パラメタ } t \text{ を導入する}$$

とこの問題では AB 間は直線だから、始点を  $t=0$  とし、終点を  $t=1$  とすると、直線上の座標は下の式であらわすことができる。

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-3t \\ 3 \end{pmatrix}$$

また、下の計算式を使用する。

$$dm = \rho \cdot ds \quad ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{m}$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

( 1 )  $\rho(x, y, z) = x$  [kg/m] のとき

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-3t \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt = \sqrt{10} \cdot dt \quad dm = \rho \cdot ds = x \cdot \sqrt{10} \cdot dt = \sqrt{10} \cdot (1+t)dt$$

ゆえに、質量は

$$m = \int_0^1 \sqrt{10} \cdot (1+t)dt = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

重心の位置は

$$\bar{x} = \frac{\int xdm}{m} = \frac{\int_0^1 (1+t)\sqrt{10} \cdot (1+t)dt}{\frac{3}{2}\sqrt{10}} = \frac{14}{9} \quad \bar{y} = \frac{\int ydm}{m} = \frac{\int_0^1 (2-3t)\sqrt{10} \cdot (1+t)dt}{\frac{3}{2}\sqrt{10}} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{z} = \frac{\int zdm}{m} = \frac{\int_0^1 3\sqrt{10} \cdot (1+t)dt}{\frac{3}{2}\sqrt{10}} = 3$$

慣性 2 次モーメントは

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm = \int_0^1 [(2-3t)^2 + 9]\sqrt{10} \cdot (1+t)dt = \frac{59}{4}\sqrt{10}$$

$$I_{yy} = \int (z^2 + x^2)dm = \int_0^1 [9 + (1+t)^2]\sqrt{10} \cdot (1+t)dt = \frac{69}{4}\sqrt{10}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)dm = \int_0^1 [(1+t)^2 + (2-3t)^2]\sqrt{10} \cdot (1+t)dt = 5\sqrt{10}$$

( 2 )  $\rho(x, y, z) = y^2$  [kg/m] のとき

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-3t \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt = \sqrt{10} \cdot dt \quad dm = \rho \cdot ds = y^2 \cdot \sqrt{10} \cdot dt = \sqrt{10} \cdot (2-3t)^2 dt$$

ゆえに、質量は

$$m = \int_0^1 \sqrt{10} \cdot (2-3t)^2 dt = \frac{5}{4} \sqrt{10}$$

重心の位置は

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int_0^1 (1+t) \sqrt{10} \cdot (2-3t)^2 dt}{\frac{5}{4} \sqrt{10}} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int_0^1 (2-3t) \sqrt{10} \cdot (2-3t)^2 dt}{\frac{5}{4} \sqrt{10}} = \frac{44}{25}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dm}{m} = \frac{\int_0^1 3 \sqrt{10} \cdot (2-3t)^2 dt}{\frac{5}{4} \sqrt{10}} = \frac{12}{5}$$

慣性 2 次モーメントは

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm = \int_0^1 [(2-3t)^2 + 9] \sqrt{10} \cdot (2-3t)^2 dt = \frac{59}{4} \sqrt{10}$$

$$I_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm = \int_0^1 [9 + (1+t)^2] \sqrt{10} \cdot (2-3t)^2 dt = \frac{638}{60} \sqrt{10}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int_0^1 [(1+t)^2 + (2-3t)^2] \sqrt{10} \cdot (2-3t)^2 dt = \frac{230}{60} \sqrt{10}$$

( 3 )  $\rho(x, y, z) = x + y + z$  [kg/m] のとき

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-3t \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt = \sqrt{10} \cdot dt$$

$$dm = \rho \cdot ds = (x + y + z) \cdot \sqrt{10} \cdot dt = \sqrt{10} \cdot (6 - 2t) dt$$

ゆえに、質量は

$$m = \int_0^1 \sqrt{10} \cdot (6 - 2t) dt = 5\sqrt{10}$$

重心の位置は

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int_0^1 (1+t) \sqrt{10} \cdot (6-2t) dt}{5\sqrt{10}} = \frac{22}{15}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int_0^1 (2-3t) \sqrt{10} \cdot (6-2t) dt}{5\sqrt{10}} = \frac{9}{15}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dm}{m} = \frac{\int_0^1 3\sqrt{10} \cdot (6-2t) dt}{5\sqrt{10}} = 3$$

慣性 2 次モーメントは

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm = \int_0^1 [(2-3t)^2 + 9] \sqrt{10} \cdot (6-2t) dt = \frac{303}{6} \sqrt{10}$$

$$I_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm = \int_0^1 [9 + (1+t)^2] \sqrt{10} \cdot (6-2t) dt = \frac{337}{6} \sqrt{10}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int_0^1 [(1+t)^2 + (2-3t)^2] \sqrt{10} \cdot (6-2t) dt = \frac{100}{6} \sqrt{10}$$