

第 9 章 フーリエ変換とラプラス変換

9 . 3

出力関数が $g(t)$ のシステムに周期関数 $e^{i\omega t}$ の入力を加えると、その出力はた

$$\text{たみこみ } u * g = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot g(t-x) dx$$

となる。

$$u * g = g * u$$

だから、出力 $y(t)$ は

$$g * u = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{i\omega \cdot (t-x)} dx$$

となる。したがって、出力は

$$y(t) = e^{i\omega \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega \cdot x} dx$$

で、フーリエ変換では、

$$G(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega \cdot t} dt$$

であるから、結局

$$y(t) = e^{i\omega \cdot t} \cdot G(i\omega) \quad \text{となる。}$$

$G(i\omega)$ は周波数伝達関数 Frequency transfer function とよばれる。

$|G(i\omega)|$ はゲイン Gain

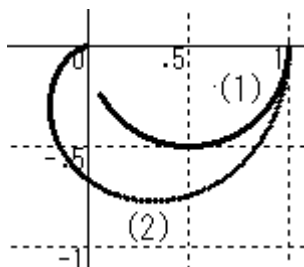
$\angle G(i\omega)$ は位相 Phase

9 . 4

$$i := \sqrt{-1} \quad R := 4 \quad C := 1000 \cdot 10^{-6} \quad \omega := 120 \cdot \pi$$

$$(1) \quad G := \frac{1}{R \cdot C \cdot i \omega + 1} \quad |G| = 0.553 \quad \arg(G) \cdot \frac{180}{\pi} = -56.45$$

$$(2) \quad G := \frac{1}{(i \omega)^2 + 1.5 \cdot i \omega + 1} \quad |G| = 7.036 \cdot 10^{-6} \quad \arg(G) \cdot \frac{180}{\pi} = -179.772$$



ベクトル線図

```
!prb0904a.bas
option arithmetic complex
set window -2,2,-2,2
set axis color 1
draw grid(0.5,0.5)

let j=complex(0,1)
let R=4
let C=1000*10^(-6)
def G1(s)=1/(R*C*s+1)
def G2(s)=1/(s^2+1.5*s+1)

set line width 3
for w=0 to 1000 step 0.01
  let s=j*w
  let H1=G1(s)
  let H2=G2(s)

  plot lines:Re(H1),Im(H1)
  plot lines:Re(H2),Im(H2)
next w

END
```

9 . 6

(1) $X(s) = G(s) \cdot 1 = \frac{1}{2s+1}$ のフーリエ逆変換は

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{st}}{2s+1} ds = \frac{1}{4\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{st}}{s + \frac{1}{2}} ds = \frac{2\pi i}{4\pi i} e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} .$$

(2) $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

したがって、 $x(t) = e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$.

(3) $G(s) = \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{s - 2i} - \frac{1}{s + 2i} \right)$

したがって、 $x(t) = \frac{1}{4i} (e^{2it} - e^{-2it}) = \frac{1}{2} \sin(2t)$.

9 . 7 (1)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{st}}{s^2 + s + 16} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{st}}{(s-\alpha)(s-\beta)} ds = \frac{2\pi i}{2\pi i \cdot (\alpha - \beta)} (e^{\alpha \cdot t} - e^{\beta \cdot t})$$

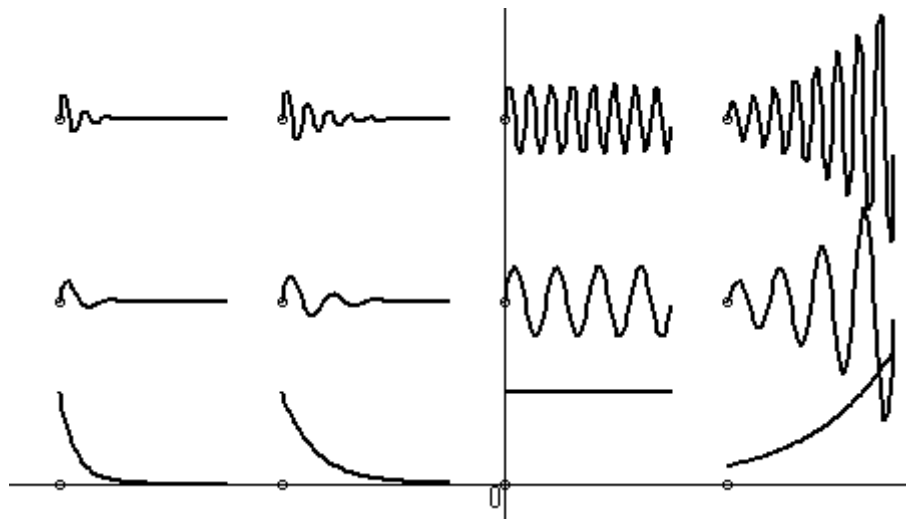
$s^2 + s + 16 = 0$ の根は $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{63}}{2}i$ and $\beta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{63}}{2}i$.

ゆえに $x(t) = \frac{2}{\sqrt{63}} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{63}}{2}t\right)$.

(2) $x(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$

$g(s) = \frac{1}{G(s)}$ とおく。 $g(s) = 0$ を特性方程式という。 特性方程式の根の位置に

よって応答の性質が決定される。 根の位置とインパルス応答の性質を次のような図にしてみよう。 下半分の共役複素数は省いている。



graph03.bas

9.8 ステップ関数は $f(t) = \begin{cases} 1 \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases}$

したがって、そのラプラス変換は

$$L(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s} \left[-e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

9.9 次の公式を利用する。

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)} ds = \frac{1}{ab} \left(1 - \frac{be^{-at}}{b-a} + \frac{ae^{-bt}}{b-a} \right)$$

とくに a と b が複素数の場合、 $a = \alpha + i\beta$ 、 $b = \alpha - i\beta$ とすると、

$$I = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(1 - e^{-\alpha \cdot t} \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha \cdot t} \sin \beta t \right) .$$

ステップ応答は伝達関数に $\frac{1}{s}$ をかけたものだから、

$$(1) \quad G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s+2)s} \quad \text{ゆえに、} x(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$$

$$(2) \quad G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{(s^2 + s + 16)s}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{63}}{2} \quad \text{だから、}$$

$$x(t) = \frac{1}{18} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{63}}{2} t - \frac{1}{\sqrt{63}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{63}}{2} t \right)$$

9.10

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} G(s) \cdot e^{st} ds$$

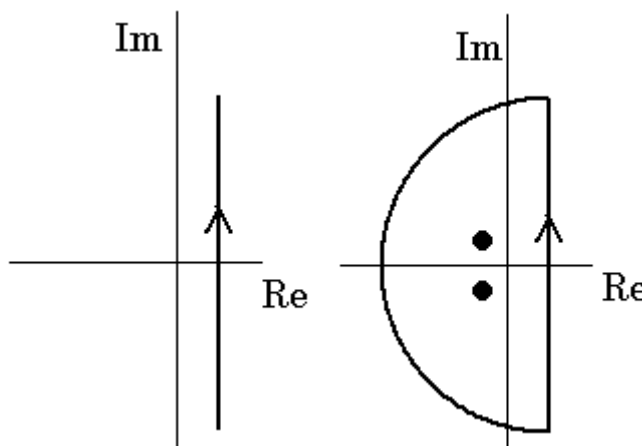
上の方程式はラプラス逆変換である。

実数 a は $G(s)$ のすべての特異点の実部よりも大きくなければならない。

直接の積分は難しいが、もし $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \rightarrow 0$ の場合、積分の経路が、左半分の面で、きわめて大きな半径 R の半円で閉じることができる。

もし R が十分大きく、半円の経路に沿って

$\int G(s)e^{st} ds \rightarrow 0$ であるならば、右の二つの経路は等価である。



ラプラス逆変換の経路 等価の経路
複素平面での積分の経路

複素平面上での閉じた経路での積分は次のように計算できる。

$$\oint \frac{f_1(z)}{z-a_1} dz + \oint \frac{f_2(z)}{z-a_2} dz + \dots = 2\pi \cdot i \cdot (f_1(a_1) + f_2(a_2) + \dots)$$

ゆえに、時間関数 $g(t)$ が、

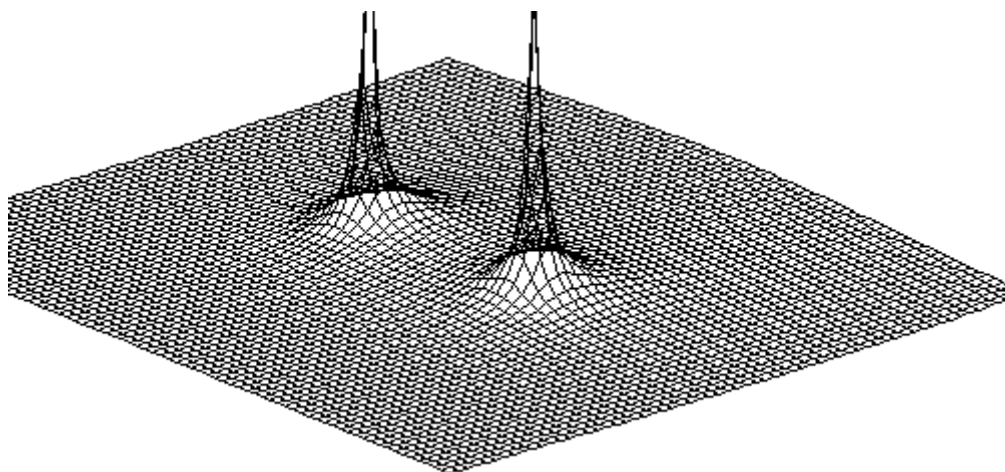
$$g(t) = f_1(a_1) + f_2(a_2) + \dots$$

とまとめられる。

$f_1(a_1), f_2(a_2), \dots$ は、複素平面の左半分における $G(s)e^{st}$ の特異点の留数である。

ラプラス逆変換を行うとき、通常 $G(s)$ を次のように開く。

$$G(s)e^{st} \rightarrow \frac{f_1(s)e^{st}}{s-a_1} + \frac{f_2(s)e^{st}}{s-a_2} + \dots$$



regla05.bas

An image of $\left| \frac{e^s}{s^2 + s + 1} \right|$