

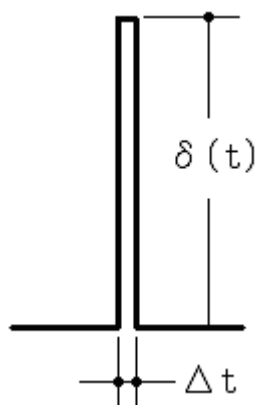
第7章 フーリエ変換

フーリエペア (Fourier Pair)

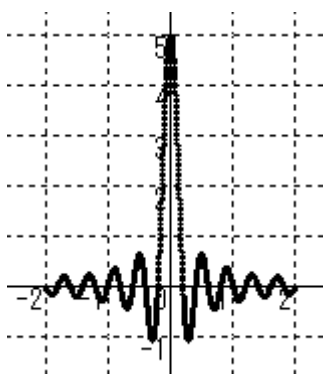
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

7 . 3 本題に入る前にまずはディラック関数 (インパルス) のイメージ



$$\delta(t)_{t=0} = \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



近似計算でのイメージ

ディラック関数（インパルス）のフーリエ変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = 1$$

逆变換すると

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

t と ω を入れ替えると

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \omega \cdot t} dt$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \omega \cdot t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$

対称性から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$

これをしっかり覚える。

それと、もうひとつ $f(t) = e^{-a|t|}$ のフーリエ変換

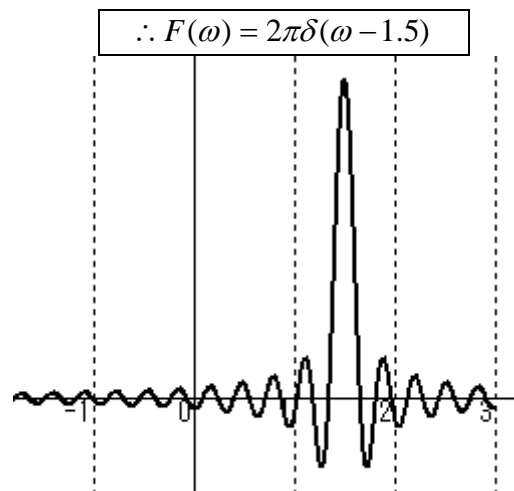
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt \\ &= \left[\frac{1}{a - i\omega} e^{(a - i\omega)t} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{1}{-a - i\omega} e^{-(a + i\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a - i\omega} + \frac{1}{a + i\omega} \end{aligned}$$

$$= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

ところで、 $a \rightarrow +0$ で上の式は $\frac{2a}{a^2 + \omega^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = 2\pi\delta(\omega)$

7.4 (3) $f(t) = e^{i \cdot 1.5t}$ のフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot 1.5 \cdot t} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot (\omega - 1.5) \cdot t} dt$$



一般に $f(t) = e^{i \cdot a \cdot t} \quad F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - a)$

$f(t) = e^{-i \cdot a \cdot t} \quad F(\omega) = 2\pi\delta(\omega + a)$

7.5

(1) $f(t) = \cos 3t = \frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} \quad \therefore F(\omega) = \pi\delta(\omega - 3) + \pi\delta(\omega + 3)$

(2) $f(t) = \sin 3t = \frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2i} \quad \therefore F(\omega) = -i\pi\delta(\omega - 3) + i\pi\delta(\omega + 3)$

(3) $f(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$ (for $t \geq 0$) $f(t) = 0$ (for $t < 0$)

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-\left(\frac{1}{2}+i\omega\right)t}}{-i\omega - \frac{1}{2}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2i\omega + 1}$$

(4) $f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$ (for $t \geq 0$) $f(t) = 0$ (for $t < 0$)

一般式 $f(t) = \begin{cases} e^{-at} \sin(bt) \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases}$ でもとめる。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \left(e^{-(a+i\omega-ib)t} - e^{-(a+i\omega+ib)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2i} \left[-\frac{e^{-(a+i\omega-ib)t}}{a+i\omega-ib} + \frac{e^{-(a+i\omega+ib)t}}{a+i\omega+ib} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2i} \frac{ib+ib}{(a+i\omega)^2 + b^2} = \frac{b}{(a+i\omega)^2 + b^2} \\ &= \frac{b}{(a+i\omega)^2 + b^2} = \frac{b}{a^2 + b^2 - \omega^2 + 2ia\omega} \end{aligned}$$

(6) $f(t) = \begin{cases} 1 \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases}$ ステップ関数は $f(t) = \begin{cases} e^{-at} \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases}$ $a \rightarrow 0$ で近似

$$F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a-i\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - \frac{i\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$a \rightarrow +0$ で $\frac{a}{a^2 + \omega^2} \rightarrow \pi\delta(\omega)$ 、 $-\frac{i\omega}{a^2 + \omega^2} \rightarrow \frac{1}{i\omega}$

ゆえに、 $F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$

(7) $f(t) = \cos 3t$ (for $t \geq 0$) $f(t) = 0$ (for $t < 0$)

$f(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos 3t \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases}$ で近似して $a \rightarrow 0$ とする。

$$F(\omega) = \frac{i\omega}{3^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$$

(8) $f(t) = \sin 3t$ (for $t \geq 0$) $f(t) = 0$ (for $t < 0$)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} \sin 3t \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases} \quad \text{で近似して } a \rightarrow 0 \text{ とする。}$$

$$F(\omega) = \frac{3}{3^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2i} [\delta(\omega - 3) - \delta(\omega + 3)]$$

7 . 6 逆フーリエ変換

(1) $F(\omega) = \pi \{ \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1) \}$

(2) $F(\omega) = -i\pi \{ \delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1) \}$

(3) $F(\omega) = \frac{1}{5 \cdot i\omega + 1}$

(4) $F(\omega) = \frac{1}{(i\omega + 2)(i\omega + 3)}$

(5) $F(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 + (i\omega) + 1}$

(ヒント)

(1) ~ (2) は 7 . 5 を参考にして考えよ。

(3) ~ (5) では

$$s = i\omega \text{ を代入すると } d\omega = \frac{ds}{i} \text{ 。}$$

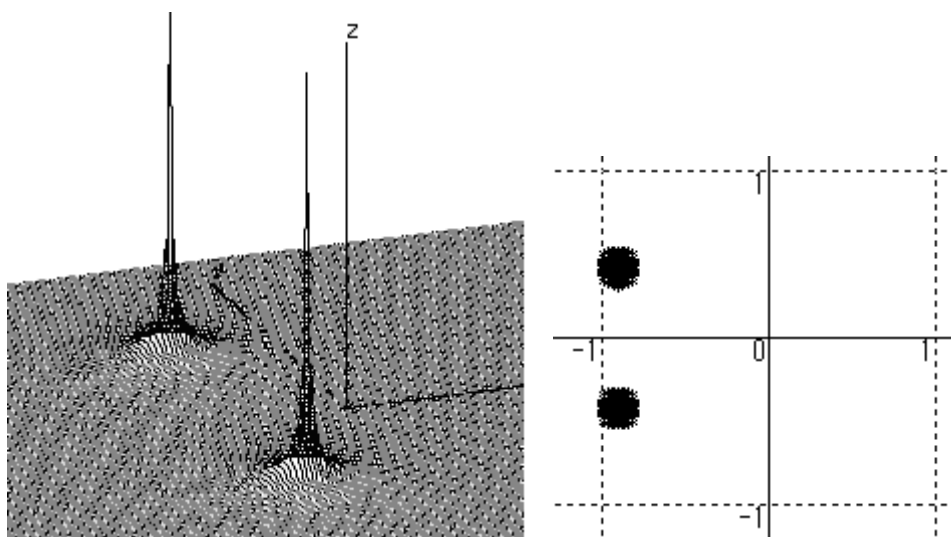
逆フーリエ変換に $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t} d\omega$ の代わりに

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(s) \cdot e^{s \cdot t} ds \text{ を使え。 } 4 . 8 \sim 4 . 9 \text{ 参照。}$$

伝達関数

$$G = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}$$

上の伝達関数の分母が0となるような s の値（根）は極と言って、その位置はこのシステムの性質をあらわす。では、その根の位置を複素平面上で求めて見よう。複素平面をスキャンし、まず、伝達関数の尖がり具合を見てみる。

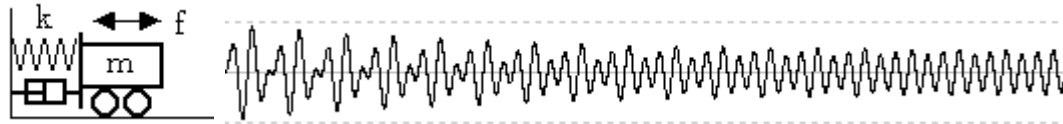


複素平面の左半分に2個 根がありそうだ。 近似値を探ろう。

サンプルプログラム

```
!根 01.bas  2nd order system
option arithmetic complex
set window -2,2,-2,2
draw grid with scale(1,1)
let m=1
let k=1
let b=1.8
let i=complex(0,1)
for x=-5 to 2 step 0.02
  for y=-2 to 2 step 0.02
    let s=x+i*y
    if abs(1/(m*s^2+b*s+k))>10 then
      plot points:x,y
    end if
  next y
next x
END
```

7.7 周波数応答



上図は質量、バネ、ダンパーで構成されるシステム。

質量に一定の周期的な力 f を加える。 過渡的な段階を過ぎると、振動は一定になる。

最初の段階での質量の位置 x の時間 t にたいする変化は過渡応答。

十分時間がたった x の変化は定常応答。

周期的な力 f の入力にたいする位置 x の出力は周波数応答。

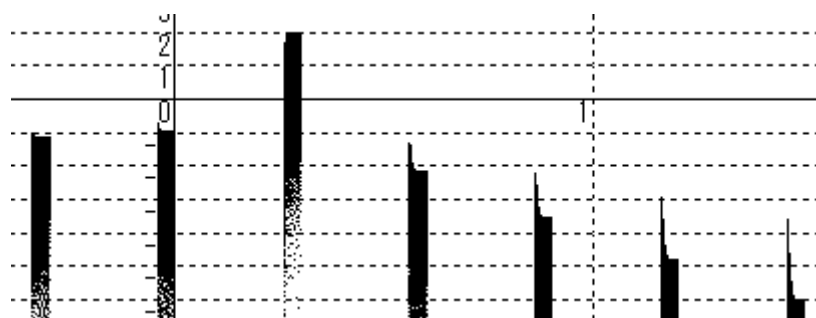
上図で $m = 1$ [kg]、 $c = 0.05$ [Ns/m]、 $k = 4$ [N/m] のシステムにたいし、

$$f = \sin(\omega \cdot t)$$

の入力を与える。 ω の値を 0.5、1、2、4、8、16、32 [rad/s] とし順番に周波数応答をシミュレートし定常応答を求めよ。

横軸に $\log_{10}(\omega)$ 、縦軸に $20 \cdot \log_{10}(|x|)$ をとれ。

($20 \cdot \log_{10}(|x|)$ の単位はデシベル dB である。)



```
!振掃 02a.bas
option arithmetic complex
set window -4,20,-100,100
```

```

draw grid with scale(10,10)

let m=1
let c=0.05
let k=4
let dt=0.01
let kk=0.4
for n=-4 to 10 step 2
  let w=2^(n/2)
  for t=0 to 500 step dt
    let f=sin(w*t)
    let a=(f-c*v-k*x)/m
    let v=v+a*dt
    let x=x+v*dt
  next n
next t
let h=abs(x)+0.000001
plot lines: -kk+10*log10(w)+0.0008*t,20*log10(h)
let x=0
let v=0
END

```

7.8 ボード線図

先の問題での運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = r(t) \quad , \quad r(t) = \sin(\omega \cdot t)$$

であらわされる。

ところで、このようなシステムの動特性を調べる手段として次の2つの便利な変換がもちいられる。

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$	<p>ラプラス変換 (過渡応答を調べるのに便利)</p>
$F(i \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$	<p>フーリエ変換 (周波数応答を調べるのに便利)</p>

少々乱暴ないいかたをすれば、 $t = 0$ のとき、

$$x=0 \quad \frac{dx}{dt}=0$$

の場合には、ラプラス変換での s フーリエ変換での i は $\frac{d}{dt}$ のかわりをする

演算子としてもちいることができ、上の微分方程式

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x + c \cdot \frac{d}{dt} x + k \cdot x = r(t)$$

は

$$m \cdot s^2 \cdot X(s) + c \cdot s \cdot X(s) + k \cdot X(s) = R(s) \quad .$$

この式は代数的に処理することができ、変換後の出力と入力の比は

$$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + c \cdot s + k}$$

となる。 s のかわりに $i\omega$ を入れたものは、

$$G(i\omega) = \frac{X(i\omega)}{R(i\omega)} = \frac{1}{m \cdot (i\omega)^2 + c \cdot i\omega + k} \quad .$$

これらの関数は、

$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + c \cdot s + k}$	伝達関数
$G(i\omega) = \frac{X(i\omega)}{R(i\omega)} = \frac{1}{m \cdot (i\omega)^2 + c \cdot i\omega + k}$	周波数伝達関数

と呼ばれる。

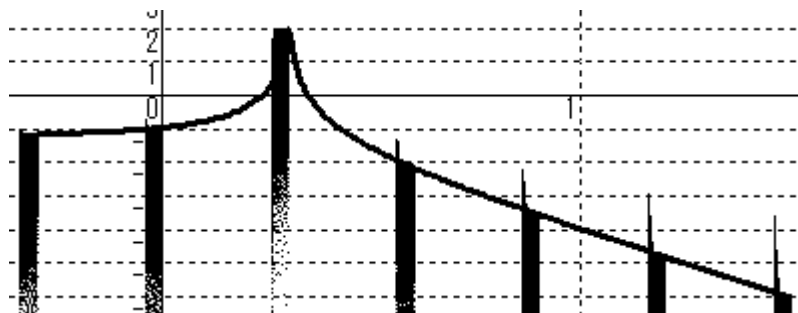
s と $i\omega$ の世界では、出力は伝達関数に入力を代数的に掛けたものでよい。

先の例題の周波数応答においては、 $\sin(\omega \cdot t)$ の入力に対する定常応答の振幅は、周波数伝達関数の絶対値そのものであらわさる。

複素数の計算後 $\log_{10}()$ を横軸に、 $20 \cdot \log_{10}(|k \cdot G(i \cdot \omega)|)$ を縦軸にとって描かれたグラフをゲインのボード線図という。

7 . 9

先の問題で描いた各周波数各速度 w にたいする、棒グラフに、ボード線図を追加せよ。 描かれたボード線図の意味について、自分の言葉で説明せよ。



!-----ボード線図を追加-----

```

set line width 3
set line color 2
let i=complex(0,1)
for n=-40 to 200
  let w=2^(n/40)
  let s=i*w
  let h=abs(1/(m*s^2+c*s+k))
  plot lines:10*log10(w),20*log10(h);
next n
    
```