

第 6 章 フーリエ級数の原理と複素形フーリエ級数

考えよう フーリエ級数の原理！

6 . 1 $m、n$ を整数とするとき

$$(1) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = \begin{cases} 1 \dots (m = n) \\ 0 \dots (m \neq n) \end{cases}$$

$$(2) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = \begin{cases} 1 \dots (m = n) \\ 0 \dots (m \neq n) \end{cases}$$

$$(3) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt = \begin{cases} 0 \dots (m = n) \\ 0 \dots (m \neq n) \end{cases}$$

6 . 2 2 を周期とする関数をフーリエ級数

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) + a_3 \cos(3t) + \dots \\ + b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t) + \dots$$

で近似する場合フーリエ係数は 6 . 1 を適用すると次のように求められる。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

a_n と b_n の 2 種類の係数が必要な理由は、周期関数は周波数 のほかに、振幅 A と位相 の 2 個のパラメタが必要だからである。 次を見よ。

6 . 3 $a \cos(\omega \cdot t) + b \sin(\omega \cdot t)$ の振幅と位相はなにか？

$$a \cos(\omega \cdot t) + b \sin(\omega \cdot t) = A \sin(\omega \cdot t - \phi) \text{ とおく。}$$

$$b > 0 \text{ のとき } A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$b < 0 \text{ のとき } A = -\sqrt{a^2 + b^2} \quad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

6.4.2 を周期する関数のフーリエ級数に

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2 \cdot i}$$

を代入すると、

$$f(t) \approx \frac{c_0}{2} + c_1 \cdot e^{it} + c_2 \cdot e^{i2t} + c_3 \cdot e^{i3t} + \dots$$

$$+ c_{-1} \cdot e^{-it} + c_{-2} \cdot e^{-i2t} + c_{-3} \cdot e^{-i3t} + \dots$$

がえられ、これを複素形フーリエ級数という。その係数は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-i \cdot n \cdot t} dt$$

6.5 2Lを周期とする関数を

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}t\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + a_3 \cos\left(\frac{3\pi}{L}t\right) + \dots$$

$$+ b_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}t\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + b_3 \sin\left(\frac{3\pi}{L}t\right) + \dots$$

で近似する場合フーリエ係数は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt$$

6.6 2Lを周期とする関数を複素形フーリエ級数

$$f(t) \approx \frac{c_0}{2} + c_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{L}t} + c_2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{L}t} + c_3 \cdot e^{i\frac{3\pi}{L}t} + \dots$$
$$+ c_{-1} \cdot e^{-i\frac{\pi}{L}t} + c_{-2} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{L}t} + c_{-3} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{L}t} + \dots$$

で近似する場合、その複素形フーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \cdot e^{-i\frac{n\pi}{L}t} dt$$