

第5章 フーリエ係数

5.3 (1) 周期関数 Periodic function $f(t) = \sin 3t$ がある。 $t = 0 \rightarrow 10$ にたいして、 $\Delta t = 0.2$ でサンプリングした 50 個の値 f_i を表にせよ。 さらに、数値近似式を使って横軸 $\omega = 0 \rightarrow 5$ にたいして F_n を計算し、横軸を ω 、縦軸を F_n としてグラフに表わせ。

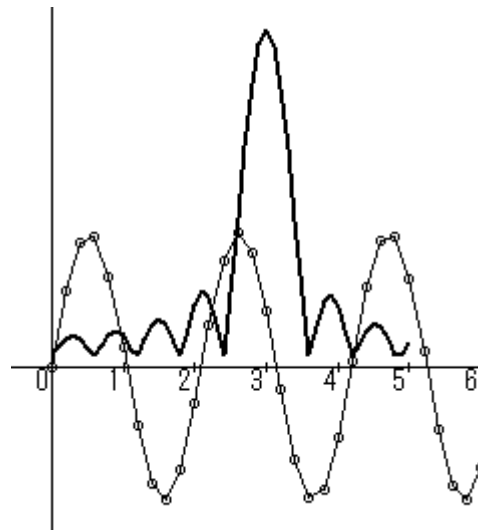
(2) F_n のグラフを周波数スペクトル図 Frequency spectrum という。 Frequency spectrum から気をつくことを述べよ。

(Hint) Excel VBA のかわりに十進 BASIC を使用してプログラムを作ると

```
!フーリエ係数
!フ級 03b.bas Uede 05-04-23
option base 0
set window -4,10,-5,25
set axis color 1
draw axes(1,100)

dim f(100)

set point style 4
let dt=0.2
for j=0 to 50
  let x=sin(3*t)
  let f(j)=x
  plot points:t,x*4
  plot lines:t,x*4;
  let t=t+dt
next j
plot lines
!-----
set line width 2
for w=0 to 5 step 0.1
  let c=0
  let s=0
  for t=0 to 10 step dt
    let j=t*5
    let c=c+f(j)*cos(w*t)*dt
    let s=s+f(j)*sin(w*t)*dt
  next t
  let c=2/t*c
  let s=2/t*s
  plot lines:w,sqr(c^2+s^2)*10;
next w
END
```



スペクトル図では周期関数の周波数 $\omega = 3$ で縦軸の値が最大となる。

5 . 4 (1) Frequency function $f(t) = \cos 3t$ がある。 $t = 0 \rightarrow 10$ にたいして、 $\Delta t = 0.2$ でサンプリングした 50 個の値 f_i を表にせよ。 さらに、 数値近似式を使って横軸 $\omega = 0 \rightarrow 5$ にたいして F_n を計算し、 横軸を ω 、 縦軸を F_n としてグラフに表わせ。

(2) Frequency spectrum から気をつくことを述べよ。

```
!フーリエ係数
!フ級 03c.bas Uede 05-04-29
option base 0
set window -4,10,-5,25
set axis color 1
draw axes(1,100)

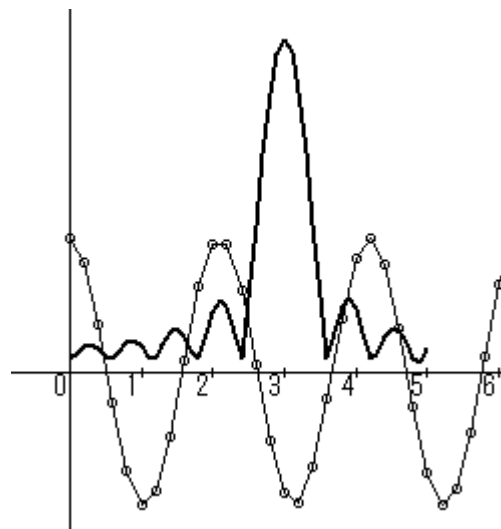
dim f(100)

set point style 4
let dt=0.2
for j=0 to 50
  let x=cos(3*t)
  let f(j)=x
  plot points:t,x*4
  plot lines:t,x*4;
  let t=t+dt
next j
plot lines
!-----
set line width 2
for w=0 to 5 step 0.1
  let c=0
  let s=0

  for t=0 to 10 step dt
    let j=t*5
    let c=c+f(j)*cos(w*t)*dt
    let s=s+f(j)*sin(w*t)*dt
  next t

  let c=2/t*c
  let s=2/t*s
  plot lines:w,sqr(c^2+s^2)*10 ;

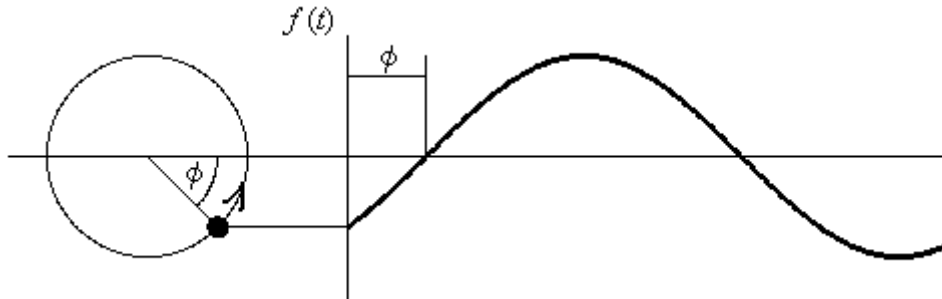
next w
END
```



前問題と比較して、周期関数の位相がずれているにも関わらず、スペクトル図では周期関数の周波数 $\omega = 3$ で縦軸の値が最大となる。

5.5 サインカーブの一般式は

$$f(t) = A \sin(\omega \cdot t - \phi) = a \cos(\omega \cdot t) + b \sin(\omega \cdot t) \quad .$$



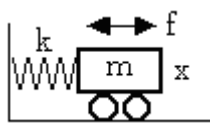
A は振幅 Amplitude、 ϕ は位相遅れ角 Phase である。A と ϕ を a, b であらわせ。

(ヒント) 正弦関数の一般式は周波数角速度 ω のほかに、振幅 A と位相遅れ角 ϕ の 2 個のパラメタが必要である。

$$b > 0 \text{ のとき} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$b < 0 \text{ のとき} \quad A = -\sqrt{a^2 + b^2} \quad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

5.6



質量バネシステム Mass-spring system がある。Mass を $m = 1$ [kg] とする。Spring constant $k = 1$ [N/m]、 $k = 4$ [N/m]、 $k = 9$ [N/m] の 3 種類にたいして、 $dt = 0.001$ として、 $f = 1/dt$ のインパルスを与えた場合の 20000 ステップの Simulation を行い、Frequency spectrum を作成して見よう。

(Hint)

!フーリエ係数

!7級 04.bas Uede 03-12-3

option base 0

option arithmetic complex

set window -4,10,-5,15

set axis color 1

draw axes(1,10)

dim f(2000)

let i=complex(0,1)

let m=1

let k=4

let dt=0.01

for j=0 to 2000

 if t=0 then

 let f1=1/dt

 else

 let f1=0

 end if

 let a=(f1-k*x)/m

 let v=v+a*dt

 let x=x+v*dt

 let f(j)=x

 plot lines:t,x*4

 let t=t+dt

next j

!-----

set line width 2

for w=0 to 7 step 0.01

 let c=0

 let s=0

 for j=0 to 2000

 let t=0.01*j

 let c=c+f(j)*cos(w*t)*dt

 let s=s+f(j)*sin(w*t)*dt

 next j

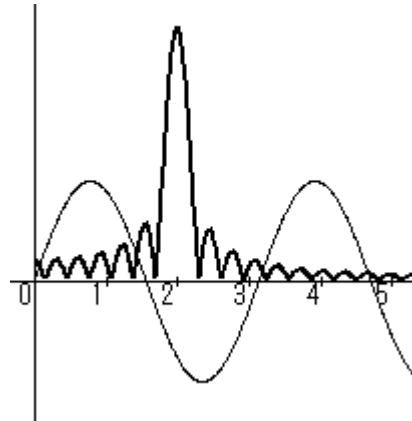
 let c=2/t*c

 let s=2/t*s

 plot lines:w,sqr(c^2+s^2)*10 ;

next w

END



5 . 8 $f(t) = 0.9 \sin(t) + 0.3 \cos(2t) + 0.4 \sin(3t)$ のとき

$$(1) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(t) dt = 0.9$$

$$(2) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(2t) dt = 0.3$$

$$(3) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(3t) dt = 0.4$$

$$(4) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(2t) dt = 0.3$$

5 . 9 $f(t) = 0.9 \sin(t) + 0.3 \cos(2t) + 0.4 \sin(3t)$ のとき.

$$(1) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-it} dt = -0.9i \quad (2) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i2t} dt = 0.3$$

$$(3) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i3t} dt = -0.4i \quad (4) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i4t} dt = 0$$

5 . 1 0 2つの関数 Functions が下の関係 Relation にあるとき、これらは
- と の間で直交する Orthogonal という。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt = 0 \quad .$$

次の2つの関数は直交する Orthogonal か？

(1) $f(t) = 1$ 、 $g(t) = t$ 直交する (2) $f(t) = \sin(t)$ 、 $g(t) = \sin(2t)$ 直交する

(3) $f(t) = \sin(t)$ 、 $g(t) = \cos(t)$ 直交する

(4) $f(t) = e^{it}$ 、 $g(t) = e^{i(2t)}$ 直交する