

第4章 線積分

4.3

$$(1) \quad \frac{e^z}{z} \rightarrow \frac{e^0}{z-0} \text{ ゆえに、 } \oint \frac{e^z}{z} dz = 2\pi e^0 \cdot i = 2\pi i$$

$$(2) \quad \frac{e^z}{z+1} \rightarrow \frac{e^{-1}}{z-(-1)} \text{ ゆえに、 } \oint \frac{e^z}{z+1} dz = 2\pi e^{-1} \cdot i = \frac{2\pi}{e} i$$

$$(3) \quad \frac{e^z}{z-a} \rightarrow \frac{e^a}{z-a} \text{ ゆえに、 } \oint \frac{e^z}{z-a} dz = 2\pi \cdot i \cdot e^a$$

4.4

絶対値の極めて小さな複素数を h とすると

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-(a+h)} dz$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a} \right) f(z) dz \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \end{aligned}$$

同様に

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{2!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$$

4.5

$$\oint \frac{e^z}{z(z+1)} dz = \oint \frac{e^z}{z} dz - \oint \frac{e^z}{z+1} dz = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

4 . 6

$$(1) \quad \frac{1}{(s-1)(s-4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s-4} - \frac{1}{s-1} \right)$$

$$(2) \quad \frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right)$$

4 . 7

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow 2+i\cdot\infty} \frac{e^z}{z} = 0$$

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow 1+i\cdot\infty} \frac{e^z}{z+1} = 0$$

4 . 8 $a=0$ のとき

$$\int_{a-i\cdot\infty}^{a+i\cdot\infty} \frac{e^z dz}{z+1} = \frac{2\pi i}{e}$$

4 . 9 $a=0$ のとき

$$(1) \quad G(s) = \frac{1}{2s+1}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\cdot\infty}^{a+i\cdot\infty} G(s) \cdot e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{st}}{2s+1} ds = \frac{2\pi i}{4\pi i} e^{-\frac{t}{2}} = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\cdot\infty}^{+i\cdot\infty} \frac{e^{st}}{s+1} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\cdot\infty}^{+i\cdot\infty} \frac{e^{st}}{s+2} ds = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{st}}{s-2i} ds - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{st}}{s+2i} ds = \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{4i} = \frac{\sin(2t)}{2}$$

$$(4) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{st}}{s^2 + s + 1} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{st}}{(s-\alpha)(s-\beta)} ds = \frac{2\pi i}{2\pi i \cdot (\alpha - \beta)} (e^{\alpha \cdot t} - e^{\beta \cdot t})$$

$$s^2 + s + 1 = 0 \text{ の根は } \alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ と } \beta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ 。$$

$$g(t) \text{ の } \alpha \text{ と } \beta \text{ に代入して、 } g(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

$$(5) \quad G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \text{ を使う。}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{st}}{s^2} ds = \frac{2\pi i \cdot t}{2\pi i} = t$$

4.10 $\sigma = 1$ のとき

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)} ds = \frac{1}{ab} \left(1 - \frac{be^{-at}}{b-a} + \frac{ae^{-bt}}{b-a} \right)$$

$$(1) \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \quad \text{では}$$

$$g(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)} ds = \frac{1}{ab} \left(1 - \frac{be^{-at}}{b-a} + \frac{ae^{-bt}}{b-a} \right) = \frac{1}{2} (1 - 2e^{-t} + e^{-2t})$$

(2) $G(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}$ では $a = \alpha + i\beta$ 、 $b = \alpha - i\beta$ とおくと

$s^2 + s + 1 = 0$ の根 $-a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 、 $-b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ から $\alpha = \frac{1}{2}$ 、 $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ だから、

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(1 - e^{-\alpha t} \cos(\beta \cdot t) - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta \cdot t) \right) \\ &= 1 - e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

(3) $G(s) = \frac{1}{s^3}$

$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$ を使う。

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{st}}{s^3} ds = \frac{2\pi i \cdot t^2}{2\pi i \cdot 2!} = \frac{t^2}{2}$$

4. 1.1 x 軸に平行な速度 U の一様流れの中におかれた循環をもつ半径 a のまわりの流れをあらわす Complex potential は

$$w = U \cdot \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + i \cdot \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \log\left(\frac{z}{a}\right)$$

である。そして、u, v をそれぞれ x 方向、y 方向の速度成分 Velocity components とするとき、

$$u - i \cdot v = \frac{dw}{dz} = U \cdot \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + i \cdot \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot z}$$

によって、u, v を求めることができる。

Cylinderまわりの流れによって、Cylinderに作用するx方向とy方向の力の成分をそれぞれ F_x , F_y とすると、Blasius の第一公式によれば、

$$F_x - iF_y = i \frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$

である。 Cylinder に作用する F_x 、 F_y をもとめてみよう。 lift02.bas

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= i \frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = i \frac{\rho}{2} \oint \left(U + \frac{i\Gamma}{2\pi z} - \frac{Ua^2}{z^2} \right)^2 dz = i \frac{\rho}{2} \frac{2i\Gamma U}{2\pi} \oint \frac{dz}{z} \\ &= i \frac{\rho}{2} \frac{2iU\Gamma}{2\pi} (2\pi i) = -i(\rho U\Gamma) \end{aligned}$$

ゆえに $F_x = 0$ 、 $F_y = \rho U\Gamma$ (揚力)

4 . 1 2 A cylinder 20 cm in diameter spins at 250 rpm in a 15 m/s wind. What is the lift per unit length of the cylinder ?

回転円柱長さ 1 m あたりの揚力は

$$F_y = \rho U\Gamma = 1.2 \cdot 15 \cdot (0.2\pi) \left(0.2\pi \frac{250}{60} \right) = 29.609 \text{ N/m}$$

単語

evaluate 計算せよ

unit circle 単位円

is represented で代表される

integrate 積分する

contour 周囲

enclose かくむ

integration 積分すること

hence ゆえに

Show that ---を証明せよ

expand 開く

limit 極限

substitute 代入する

flow 流れ

circulation 循環

force component 力成分

Blasius's First Formula ブラジウスの第一公式

state 言う

lift per unit length 単位長さあたりの揚力

line integral 線積分

origin 原点

singular point 特異点

counterclockwise 反時計回りに

region 領域

infinitely small 限りなく小さい

constant 定数

generally 一般に

L'Hospital's Theorem ロピタルの定理

partial fractions 部分分数

root 根

complex potential 複素ポテンシャル

past 通り過ぎて

velocity component 速度成分

generated 作りだされた

spin 回転する