

## 第2章 複素関数と写像

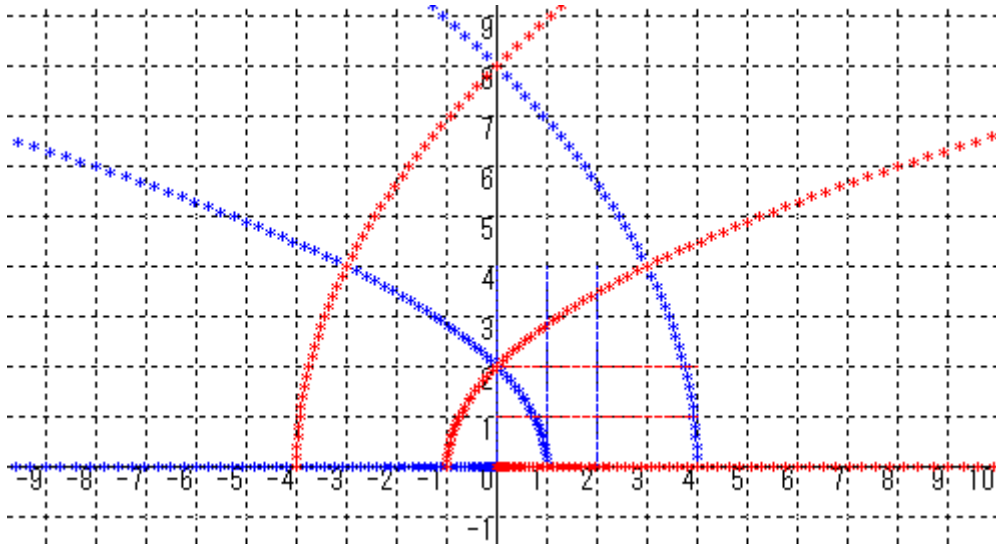
2 . 1

( 1 )  $n=1,2,\dots,3$  を整数とし、 $t=0 \sim 3$  をパラメタとする。

実軸に平行な直線は  $z = t + in$   $u = (t + in)e^{-i\frac{\pi}{6}}$  時計まわりに  $\pi/6$  傾く

虚軸に平行な直線は  $z = n + it$   $u = (n + it)e^{-i\frac{\pi}{6}}$  時計まわりに  $\pi/6$  傾く

( 2 )



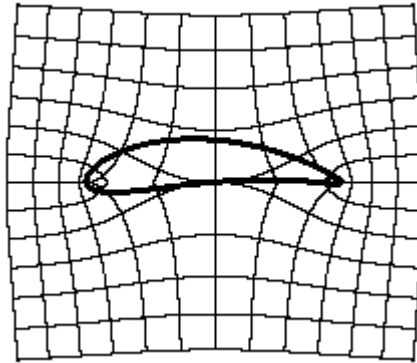
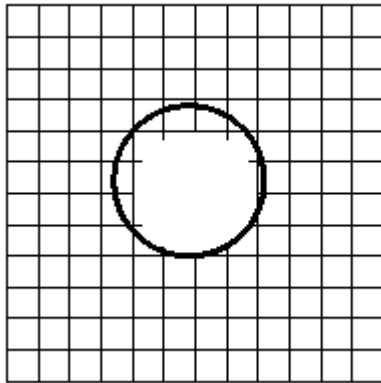
実軸に平行な直線は  $z = t + in$   $u = (t + in)^2 = t^2 - n^2 + i(2nt)$

したがって、 $\begin{cases} \text{Re}(u) = t^2 - n^2 \\ \text{Im}(u) = 2nt \end{cases}$  上の赤い曲線

虚軸に平行な直線は  $z = n + it$   $u = (n + it)^2 = n^2 - t^2 + i(2nt)$

したがって、 $\begin{cases} \text{Re}(u) = n^2 - t^2 \\ \text{Im}(u) = 2nt \end{cases}$  上の青い曲線

2 . 2  $u = z + 1/z$  によるグリッドの写像



Cartesian coordinates

```

!map01e.bas 04-8-15
option arithmetic complex
set window -8,8,-8,8

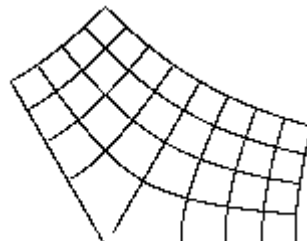
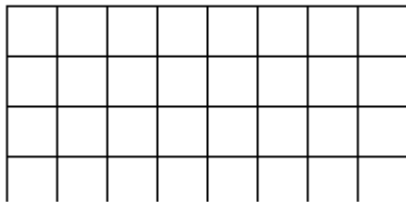
let i=complex(0,1)
for x=-3 to 3 step 0.5
  for y=-3 to 3 step 0.001
    let z=x+i*y
    let w=z+1/z
    if x^2+y^2>1 then
      plot lines:Re(z)-4,Im(z)
      plot lines:Re(w)+4,Im(w)
    end if
  next y
next x

for y=-3 to 3 step 0.5
  for x=-3 to 3 step 0.001
    let z=x+i*y
    let w=z+1/z
    if x^2+y^2>1 then
      plot lines:Re(z)-4,Im(z)
      plot lines:Re(w)+4,Im(w)
    end if
  next x
next y

END
***
    
```

2 . 4

( 1 ) 複素関数  $w = \frac{3}{2}z^2$  によるグリッドの写像。



map052c.bas

```

!map052c.bas 04-6-14

option arithmetic complex
set window -10,10,-10,10

let i=complex(0,1)

for y=0 to 4
  for x=-4 to 4 step 0.01
    let z=x+i*y
    let pfi=arg(z)
    let r=abs(z)
    let w=1.5*r^(2/3)*exp(i*pfi*2/3)
    set line width 2

    plot lines:Re(z)-4,Im(z)
    plot lines:Re(w)+4,Im(w)
  next x
next y

for x=-4 to 4
  for y=0.1 to 4 step 0.01
    let z=x+i*y
    let pfi=arg(z)
    let r=abs(z)
    let w=1.5*r^(2/3)*exp(i*pfi*2/3)
    set line width 2

    plot lines:Re(z)-4,Im(z)
    plot lines:Re(w)+4,Im(w)
  next y
next x

END
***

```

( 2 )

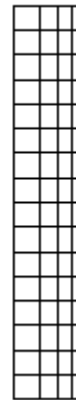
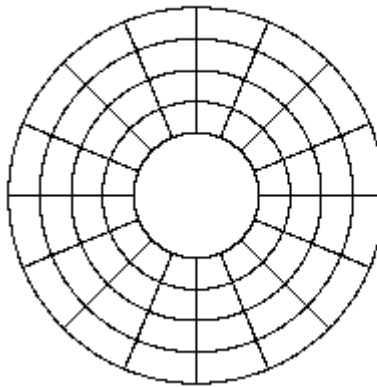
!map01i.bas 04-11-16

```

option arithmetic complex
set window -8,8,-8,8

let i=complex(0,1)
for r=1 to 3 step 0.5
  for theta=-pi to pi step pi/360
    let z=r*exp(i*theta)
    let w=log(z)
    plot lines:Re(z)-4,Im(z)
    plot lines:Re(w)+4,Im(w)
  next theta
next r

```



```

for theta=-pi to pi step pi/8
  for r=1 to 3 step 0.01
    let z=r*exp(i*theta)
    let w=log(z)
    plot lines:Re(z)-4,Im(z)
    plot lines:Re(w)+4,Im(w)
  next r
next theta

END

```

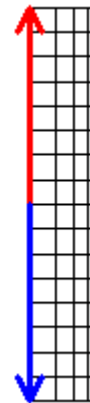
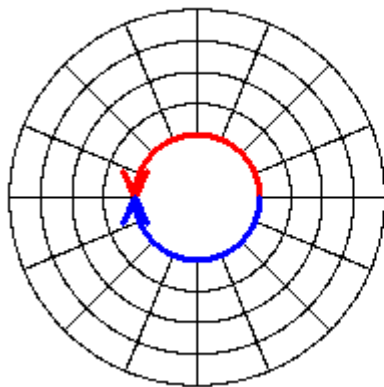
2 . 5

$$w = \log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$$

$z \rightarrow -1+0i$  ということは  $z \rightarrow 1 \cdot e^{i\pi}$  で  $u \rightarrow \log 1 + i\pi \rightarrow i\pi$

$z \rightarrow -1-0i$  ということは  $z \rightarrow 1 \cdot e^{-i\pi}$  で  $u \rightarrow \log 1 - i\pi \rightarrow -i\pi$

図で見れば



lmap01j.bas 05-5-11

```
option arithmetic complex
set window -8,8,-8,8
```

```
let i=complex(0,1)
for r=1 to 3 step 0.5
  for theta=-pi to pi step pi/360
    let z=r*exp(i*theta)
    let w=log(z)
    plot lines:Re(z)-4,Im(z)
    plot lines:Re(w)+4,Im(w)
  next theta
next r
```

```
for theta=-pi to pi step pi/8
  for r=1 to 3 step 0.01
    let z=r*exp(i*theta)
    let w=log(z)
    plot lines:Re(z)-4,Im(z)
    plot lines:Re(w)+4,Im(w)
  next r
next theta
```

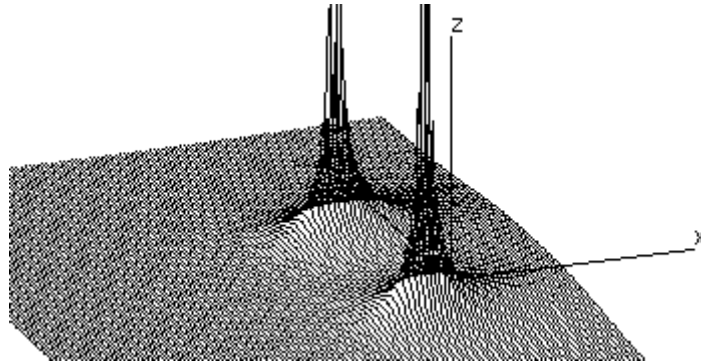
```
set line width 3
set line color 4
for theta=0 to pi step 0.01
  let z=exp(i*theta)
  let w=log(z)
  plot lines:Re(z)-4,Im(z)
  plot lines:Re(w)+4,Im(w)
next theta
draw tip with scale(2)*rotate(pi/2) *shift(-5,0)
draw tip with scale(2)*rotate(-pi/2) *shift(4,pi)
```

```
set line color 2
for theta=-pi to 0 step 0.01
  let z=exp(i*theta)
  let w=log(z)
  plot lines:Re(z)-4,Im(z)
  plot lines:Re(w)+4,Im(w)
next theta
draw tip with scale(2)*rotate(-pi/2) *shift(-5,0)
draw tip with scale(2)*rotate(pi/2) *shift(4,-pi)
```

END

```
external picture tip
option arithmetic complex
plot lines:0.2,0.1;0,0;0.2,-0.1
end picture
```

---



## 描画のプログラム

lregla06.bas by T.Uede 04-11-19

```
option arithmetic complex
let s=2.2*3
set window -0.5*s,0.5*s,-0.5*s,0.5*s
let kk=1.7
let alpha=-20
let beta=70
let stp=0.03
```

```
let i=complex(0,1)
```

```
def f(s)=exp(s)/(s^2+s+1)
```

```
! 曲面-----
```

```
for x=0.6 to -3 step -stp
  for y=3 to -3 step -stp
    let s=x+i*y
    let z=abs(f(s))/5
    call Plotto(x,y,z)
  next y
  call PenUp
next x
```

```
! 軸-----
```

```
call plotto(0,0,0)
call plotto(kk,0,0)
call plotto(0,0,0)
call plotto(0,kk,0)
call plotto(0,0,0)
call plotto(0,0,kk)
call penup
call plottext(kk,0,0,"x")
call plottext(0,kk,0,"y")
call plottext(0,0,kk,"z")
!call plottext(-2,-1,-2,"0")
```

```
let y0=y*cos(a)-z*sin(a)
let z0=y*sin(a)+z*cos(a)
let y=y0
let z=z0
```

```
end sub
```

```
sub roty(x,y,z,a)
```

```
let x0=x*cos(a)+z*sin(a)
let z0=-x*sin(a)+z*cos(a)
let x=x0
let z=z0
```

```
end sub
```

```
sub rotz(x,y,z,a)
```

```
let x0=x*cos(a)-y*sin(a)
let y0=x*sin(a)+y*cos(a)
let x=x0
let y=y0
```

```
end sub
```

```
sub convert(x,y,z)
```

```
call rotz(x,y,z,-alpha*pi/180)
call rotx(x,y,z,-beta*pi/180)
```

```
end sub
```

```
sub plotto(x,y,z)
```

```
let x1=x
let y1=y
let z1=z
call convert(x1,y1,z1)
plot lines:x1,y1;
```

```
end sub
```

```
sub penup
```

```
plot lines
```

```
end sub
```

```
sub plottext(x,y,z,s$)
```

```
let x1=x
let y1=y
let z1=z
call convert(x1,y1,z1)
plot text ,at x1,y1: s$
```

```
***
```

```
!-----subroutines-----
sub rotx(x,y,z,a)
```

```
end sub
```

```
END
```

### Laplace's Equation (ラプラスの方程式)

Regular (正則) では

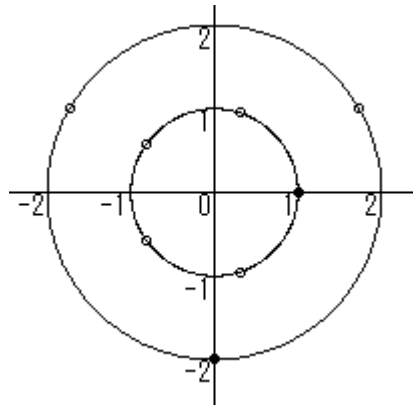
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad .$$

\*\*\*\*\*

### [ 頭の体操 ]

( 1 )  $z^5 = 1$

( 4 )  $z^3 = 8 \cdot i$



```
!root08.bas
option arithmetic complex
set window -6,6,-6,6
set axis color 1
draw axes
let i=complex(0,1)
set point style 4
for t=0 to 2*pi step 2*pi/5
  let z=exp(i*t)
  plot points:Re(z),Im(z)
next t
draw disk with scale(0.04)*shift(1,0)
draw circle
for t=0-pi/2 to 2*pi-pi/2 step 2*pi/3
  let z=2*exp(i*t)
  plot points:Re(z),Im(z)
next t
draw disk with scale(0.04)*shift(0,-2)
draw circle with scale(2)
*** END
```

2. 1.2 流体力学や静電場にあらわれる複素関数  $w = f(z) = \phi + i \cdot \psi$  で  $\psi = const.$  と置くと、流線がえられる。

$w = f(z) = \phi + i \cdot \psi$  で  $\phi = const.$  と置くと、等ポテンシャル線がえられる。

(1)  $w = U \cdot z$  ( $U$  は定数)

簡単にするために  $U = 1$  とおこう。

$$w = z = x + iy$$

等ポテンシャル線は

$$\phi = x = const.$$

で、これは縦軸に平行な線群である。

流線は

$$\psi = y = const.$$

で、水平線に平行な線群である。

(2)  $w = U \cdot z \cdot e^{i\alpha}$  ( $U$ 、 $\alpha$  は定数)

簡単にするために  $U = 1$ 、 $\alpha = \pi/6$  とおこう。

$$w = z \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = (x + iy) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + i \left( \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$$

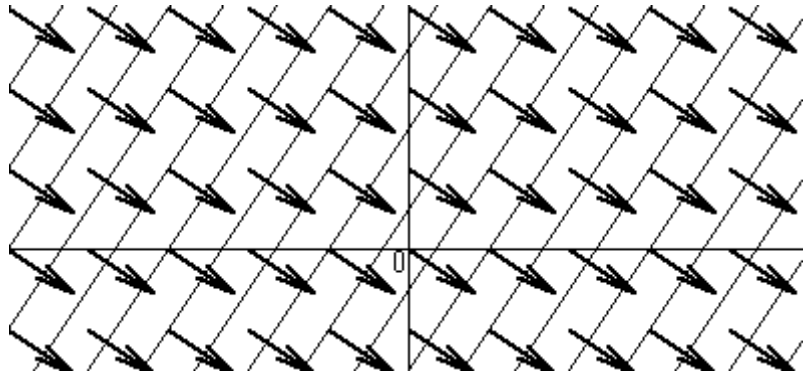
等ポテンシャル線は

$$\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = const.$$

で、

流線は

$$\psi = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = const.$$



( 3 )  $w = \frac{q}{2\pi} \log(z)$  (  $q$  は定数 )

簡単にするため  $q=2$  で考えると

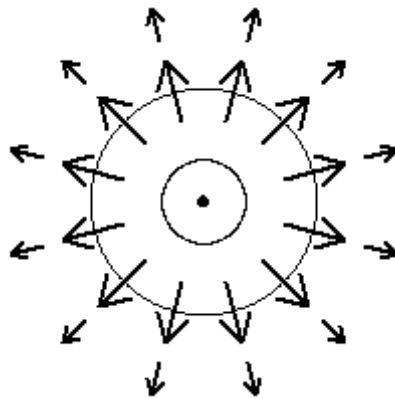
$$w = \log z = \log r + i\theta$$

ポテンシャル関数の等高線は

$$\phi = \log r = \log \sqrt{x^2 + y^2} = C$$

流線は

$$\psi = \theta = \tan^{-1}(y/x) = C'$$



( 4 )  $w = \frac{q}{2\pi} \log(z+c) - \frac{q}{2\pi} \log(z-c)$  (  $q, c$  は定数 )

簡単にするため  $q=2$  で考える。

点 A に単独に吹き出しがある場合の複素ポテンシャルは

$$w_1 = \log z_1 \quad z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

点 B に単独に吸い込みがある場合の複素ポテンシャルは



$$w_2 = -\log z_2 \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

それゆえ、これらをかさねると、

$$w = w_1 + w_2 = \log \frac{z_1}{z_2}$$

となる。したがって、

$$w = \log \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \log \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$$

複素ポテンシャル  $w = \phi + i\psi$  の実部  $\phi$  がポテンシャル関数で虚部  $\psi$  が流れ関数であることを思いだすと、速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi = \log \frac{r_1}{r_2}$$

$$\psi = \theta_1 - \theta_2$$

$= \text{const}$  とすれば  $r_1/r_2 = \text{const}$  となり、等ポテンシャル線は  $x$  軸上に中心があり、点 A、B から円周上の点までの距離の比が一定の円群となる。

なぜなら

$$\log \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = \text{const.}$$

から、

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = \text{const.} = C$$

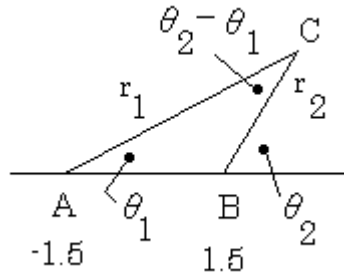
変形して、

$$\left(x - a \frac{C+1}{C-1}\right)^2 + y^2 = a^2 \frac{4C}{(C-1)^2}$$

が得られ、これは等ポテンシャル線は  $x$  軸上に中心があり、点 A、B から円周上の点までの距離の比が一定の円群となることをしめしている。

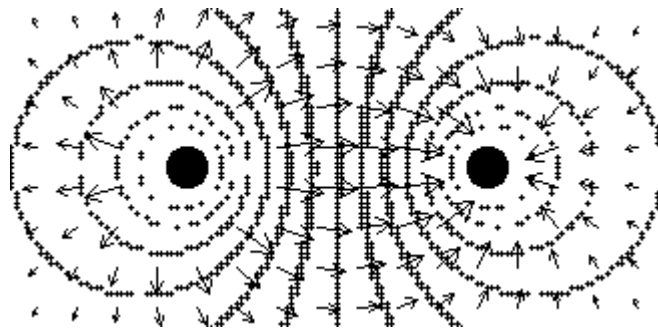
流線は

$$\psi = \theta_1 - \theta_2 = \text{const.}$$



から  $y$  軸上に中心があり、点 A、B を通る円群である。

これらを思い浮かべながら、鉛筆でグラフを描こう。



(5)  $w = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z}$  ( $m$  は定数)

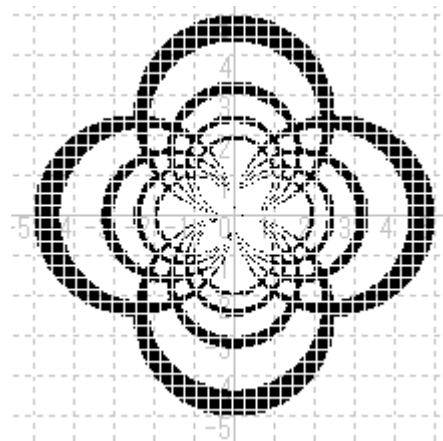
簡単にするため  $m = 2$  とする。

```
!strea01f.bas 02-7-10
!doublet

option arithmetic complex
set window -10,10,-10,10
draw grid with scale (1,1)

let i=complex(0,1)

for x=-5 to 5 step 0.06
  for y=-5 to 5 step 0.06
    let z=x+i*y
    let w=1/z
    let psi=Im(w)
    let pfi=Re(w)
```



```

if x^2+y^2>0.01 then
  for k=0.2 to 0.5 step 0.1
    if abs(psi)>k and abs(psi)<k+0.03 then
      plot lines :x,y
    end if
    if abs(pfi)>k and abs(pfi)<k+0.03 then
      plot lines :x,y
    end if
  next k
end if
next y
next x
END

```

$$(6) w = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (U, a \text{ は定数})$$

簡単にするため  $U = 1$   $a = 2$  とする。 プログラムで描かせよう。

```

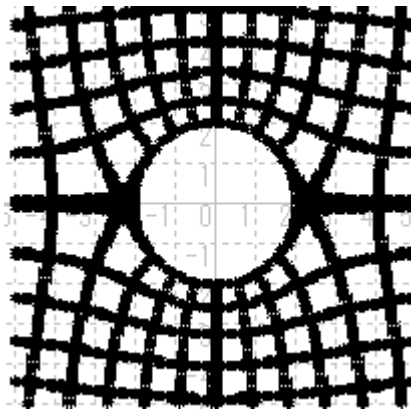
!strea01e.bas 02-7-10
option arithmetic complex
set window -10,10,-10,10
draw grid with scale (1,1)

```

```

let i=complex(0,1)
let a=2
let U=1
for x=-5 to 5 step 0.06
  for y=-5 to 5 step 0.06
    let z=x+i*y
    let w=U*(z+a^2/z)
    let psi=Im(w)
    let pfi=Re(w)
    if x^2+y^2>a^2 then
      for k=0 to 10 step 1
        if abs(psi)>k and abs(psi)<k+0.1 then
          plot points :x,y
        end if
        if abs(pfi)>k and abs(pfi)<k+0.1 then
          plot points :x,y
        end if
      next k
    end if
  next y
next x
END

```

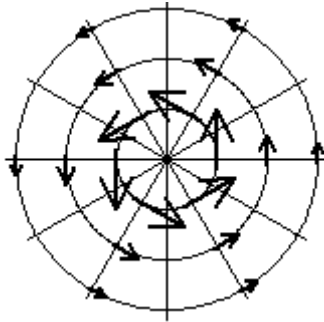


$$(7) w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z) \quad (\Gamma \text{ は定数})$$

$$w = -i \log z = \theta - i \log r$$

$$\phi = \theta = \tan^{-1}(y/x) = C$$

$$\psi = -\log r = -\log \sqrt{x^2 + y^2} = C'$$



2.13 複素ポテンシャル  $w = \phi + i\psi$  は正則である。したがって、

$\frac{dw}{dz} = p + iq$  が存在する。また、 $dz = dx + idy$  だから、

$$\begin{aligned} dw &= d\phi + id\psi = (p + iq)(dx + idy) \\ &= p dx - q dy + i(q dx + p dy) \end{aligned}$$

ゆえに、 $d\phi = p dx - q dy$ 。また、 $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + i \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$  だから、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = p \quad \text{と} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -q$$

おなじように、 $d\psi = q dx + p dy$ 。また、 $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + i \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$  だから、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = q \quad \text{と} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = p$$

ゆえに、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = p = v_x \quad \text{と} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -q = v_y$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ,$$

ゆえに、

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i \cdot v_y$$

2 . 1 5

下にもっとも簡単な座標変換の例を示す。プログラムを見てじっくり理由を考えてください。

$\psi = \text{Im}(zz) = \text{const.}$  の流線

$$zz = ze^{-i\frac{\pi}{18}}$$

$$zz = z$$

$$zz = ze^{i\frac{\pi}{18}}$$



!strea01m.bas 05-5-18

```
option arithmetic complex
set window -20,20,-20,20
!draw grid with scale (1,1)
```

```
let i=complex(0,1)
set line width 3
for t=-1 to 1 step 2
  for x=-5 to 5 step 0.03
    for y=-5 to 5 step 0.03
      let z=x+i*y
      let zz=z*exp(i*t*pi/18)
      let psi=Im(zz)
      for k=-10 to 10 step 1
        if psi>k-0.03 and psi<k+0.03 then
          set line color 2
          plot lines : x+t*12,y
```

```
end if
if psi>k-0.03 and psi<k+0.03 then
  set line color 1
  plot lines : Re(zz),Im(zz)
end if

next k
next y
next x
next t

END
```

## 単語

map 写像する

circle 円

polar coordinates 極座標

radial 放射状の

approach 近づく

various paths 種々の道すじ

converge 収束する

diverge 発散する

magnitude おおきさ

element 要素

angle 角

conformal mapping 等角写像

partial differentiation 偏微分

scan スキャンする

search 探す

reciprocal 逆数

evaluate 計算する、評価する

oscillation 振動

denominator 分母

set equal to 0 0とおかれた

grid 格子

radius 半径

Cartesian coordinates 直角座標

finite limit 極限

designated point 指定点

corresponding 相当する

smooth 滑らかな

discontinuous 不連続な

discontinuities 不連続部分

therefore ゆえに

mapping 写像

derivative 微分

regular 正則の

complex plane 複素平面

peak 頂上

location 位置

damping ダンピング

characteristic equation 特性方程式

transfer function 伝達関数

substitute 代入する

frequency 周波数

magnitude 大きさ

analyze 分析する

fluid mechanics 流体力学

heat transfer 熱伝導

electrostatic field 電界

electromagnetic field 電磁気界

hydrodynamics 流体力学

complex potential 複素ポテンシャル

streamlines 流線

equipotential lines 等ポテンシャル線

following つぎの

typical 典型的な

constant 定数

uniform stream 一様流れ

source 源、吹き出し

sink 吸い込み

doublet 2重吹き出し

cylinder 円筒

Vortex 渦

flow velocity 流れ速度

flow rate 流量

circulation 循環

unit length 単位長さ

figure 図

depict あらわす

multiply 掛ける

upward 上方向に

slant 傾く

downward 下方向に