

## 第1章 複素平面と $e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$

### 1.1 複素平面に複素数を点としてプロットする

$$z = x + i \cdot y \quad \text{直角座標形式}$$

$$z = r \cdot e^{i\theta} \quad \text{極形式}$$

$$\operatorname{Re}(z) = x = r \cos\theta \quad \text{実部}$$

$$\operatorname{Im}(z) = y = r \sin\theta \quad \text{虚部}$$

$$\operatorname{abs}(z) = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{絶対値、大きさ}$$

$$\operatorname{arg}(z) = \angle z = \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{角度}$$

$$\operatorname{conj}(z) = \bar{z} = x - i \cdot y = r \cdot e^{-i\theta} \quad \text{共役複素数}$$

### 1.2 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{1\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

1.3  $z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$  のとき  $\text{Im}(z)=1$   $\text{Arg}(z) = \pi/6$   $|z|=2$

1.4  $z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ 、 $z_2 = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$  のとき

$$(1) z = z_1 \cdot z_2 = 6e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (2) z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

1.5  $z = 1 + i \cdot \sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  のとき

$$(1) u = i \cdot z = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad (2) u = -z = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$(3) u = (\sqrt{3} + i) \cdot z = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$(4) u = \frac{z}{1+i} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \frac{1-i}{1-i} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\text{または } u = \frac{z}{1+i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

1.6  $x^5 + 1 = 0$  の根は5つで  $e^{i\frac{1}{5}\pi}$   $e^{i\frac{3}{5}\pi}$   $e^{i\pi}$   $e^{i\frac{7}{5}\pi}$   $e^{i\frac{9}{5}\pi}$  。

5つの根を x に代入して  $x^5 = -1$  となることを確かめるとよい。

1.7 オイラーの公式を使うと

$$e^{iA} e^{iB} = e^{i(A+B)} = \cos(A+B) + i \sin(A+B)$$

また

$$e^{iA}e^{iB} = (\cos A + i \sin A)(\cos B + i \sin B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B + i(\sin A \cos B + \cos A \sin B)$$

両者の実部と虚部を比較して

$$(1) \quad \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$(2) \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$1.8 \quad z' = ze^{i\theta} = (x+iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y + i(\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y)$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$1.9 \quad u = ze^{-i\theta} = (x+iy)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y + i(-\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y)$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1.10 (ベクトル軌跡)  $j = \sqrt{-1}$ 、 $T=1$ 、 $c=2$ 、 $k=1$  の場合の  $\quad = 0$   
1000

$$(1) \quad G = \frac{1}{j\omega + 1}$$

まず、 $A$  を変数として  $A = 0 \rightarrow \infty$  にたいして  $F = \frac{1}{jA+1}$  が複素平面上にどのような軌跡を

描くか検討してみよう。  $F$  を変形して

$$F = \frac{1}{jA+1} = \frac{1}{A^2+1} - j \frac{A}{A^2+1}$$

実部を  $x$ 、虚部を  $y$  とおくと、

$$x = \frac{1}{A^2+1} \quad y = \frac{-A}{A^2+1}$$

$x$ 、 $y$  の関係を求めると、

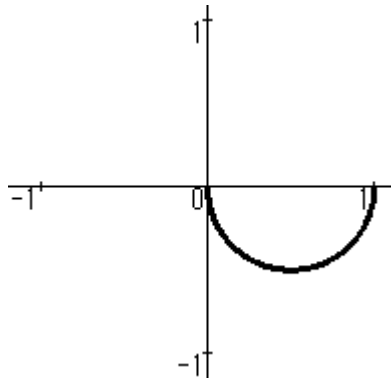
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

これは、軌跡が  $(1/2,0)$  を中心とする半径  $1/2$  の円であることを示し、 $A > 0$  の場合は  $x$  軸より下の半円であることがわかる。

$\omega = 0$  の場合は  $G = \frac{1}{j\omega + 1} = 1$ 、 $\omega \rightarrow \infty$  の場合は  $G = \frac{1}{j\omega + 1} = 0$  であるから、 $G = \frac{1}{j\omega + 1}$  は  $(0,0)$  を通る  $(1/2,0)$  を中心とする下半円の軌跡を描くことがわかる。

プログラムして作図する場合は

(1)のベクトル軌跡



サンプルプログラム

```
!振掃 02d.bas
option arithmetic complex
set window -3,3,-3,3
set axis color 1
draw axes

let j=complex(0,1)
def G(s)=1/(s+1)

set line width 3
for w=0 to 1000 step 0.01
  let s=j*w
  let H=G(s)
  plot lines:Re(H),Im(H)
next w
END
```

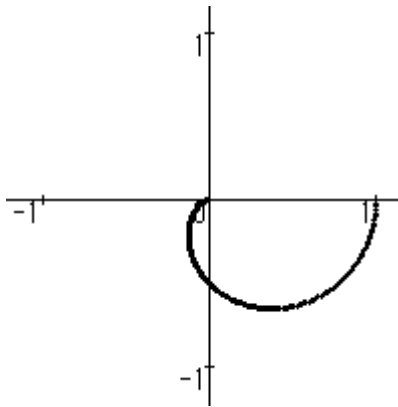
(2)

これは、数点を筆算で計算して、プロットする必要がある。

プログラムして作図する場合は

(2)のベクトル軌跡

サンプルプログラム



```

!振掃 02c.bas
option arithmetic complex
set window -3,3,-3,3
set axis color 1
draw axes
let j=complex(0,1)
def G(s)=1/(s^2+2*s+1)
set line width 3
for w=0 to 1000 step 0.01
  let s=j*w
  let H=G(s)
  plot lines:Re(H),Im(H)
next w
END

```

1 . 1 1 ( 3 相誘導モータの円線図 )  $r_1 = 1.5$  ,  $r_2 = 1.5$  ,  $x_1 = 10$  , and  $x_2 = 10$ .  
 のとき  $s=0.0001 \sim 1$  のときの

$$G = \frac{1}{r_1 + \frac{r_2}{s} + j \cdot (x_1 + x_2)}$$

のベクトル軌跡は

まず、 $A$  を変数として  $A = 0 \rightarrow \infty$  にたいして  $F = \frac{1}{A + j}$  が複素平面上にどのよう

な軌跡を描くか検討してみよう。  $F$  を変形して

$$F = \frac{1}{A + j} = \frac{A}{A^2 + 1} - j \frac{1}{A^2 + 1}$$

実部を  $x$  、虚部を  $y$  とおくと、

$$x = \frac{A}{A^2 + 1} \quad y = \frac{-1}{A^2 + 1}$$

$x$  、  $y$  の関係を求めると、

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

これは、軌跡が  $(0, -1/2)$  を中心とする半径  $1/2$  の円であることを示し、 $A > 0$  の場合は  $y$  軸より右の半円であることがわかる。

$s = 0$  の場合は  $A =$  に相当し  $G = \frac{1}{r_1 + \frac{r_2}{s} + j(x_1 + x_2)} = 0$ 、 $s = -1$  の場合は  $A$

$= 0$  に相当し  $G = \frac{1}{r_1 + \frac{r_2}{s} + j(x_1 + x_2)} = -0.05i$ 、で、軌跡は  $(0,0)$   $(0,-0.05)$  を通る

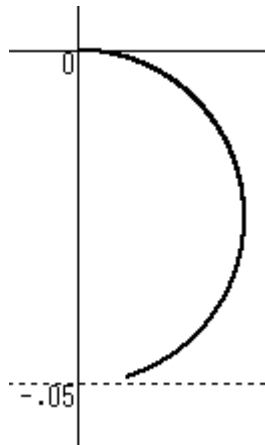
$0.025$  を中心とする右半円の上にあることがわかる。

$s = 1$  を代入して  $G = \frac{1}{r_1 + \frac{r_2}{s} + j(x_1 + x_2)} = 7 \cdot 10^{-3} - 0.049i$  が求められるので、 $s$

$= 0.0001$  から  $1$  に対する軌跡は右半円上の  $(0,0)$  から  $(0.007,-0.049)$  までを描く

プログラムして作図する場合は

ベクトル軌跡



サンプルプログラム

```
!振掃 02e.bas
option arithmetic complex
set window -3,3,-3,3
set axis color 1
draw axes
let j=complex(0,1)
let r1=1.5
let r2=1.5
let x1=10
let x2=10
def F(s)=r1+r2/s+j*(x1+x2)

set line width 2
for s=0.0001 to 1 step 0.0001
  let H=1/F(s)
  plot lines:Re(H),Im(H);
next s
END
```

1 . 1 2

$A, B, C, D$  点で  $w = \frac{e^z}{z+1} \rightarrow 0$

## 単語

---

plot	描く	complex plane	複素平面
find	見つける	real	実の
Imaginary	虚の	$\arg(z)$	$z$ の偏角
$\text{conj}(z)$	$z$ の共役複素数	$ z $	$z$ の大きさ
graph	グラフを描く	interval	区間
numerical computation	数値計算	show	証明する
suppose	仮定する	root	根
formula	公式	rotate	回転する
origin	原点	angle	角
x-y coordinates	x-y 座標	counterclockwise	
identify	特定する	frequency	周波数
transfer function	伝達関数	sketch	描画する
vector plot	ベクトル軌跡	first order system	1次システム
second order system	2次システム	gain	ゲイン
phase	位相角	examine	調べる

---