

第 12 章 接平面・法線・積分

12.1 球面が下の関数 f であらわされている。

$$f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{3^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

接平面を形成する 2 個のベクトルは

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{3^2 - x^2 - y^2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{3^2 - x^2 - y^2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

だから、 $x = 1.2, y = 1.5$ における、**接平面**を形成する 2 個の単位ベクトルは

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \begin{bmatrix} 0.887 \\ 0 \\ -0.462 \end{bmatrix}, \quad \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.838 \\ -0.546 \end{bmatrix}$$

である。

また、その**法線ベクトル**は

$$\vec{C} := \vec{A} \times \vec{B} \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} 0.521 \\ 0.651 \\ 1 \end{bmatrix}$$

だから**法線単位ベクトル**は

$$\vec{n} := \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.768 \end{bmatrix}$$

12.2

$$f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{3^2 - 0.8x^2 - 0.1y^2} \end{pmatrix}$$

接平面を形成する 2 個のベクトルは

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{3^2 - 0.8x^2 - 0.1y^2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-0.8x}{\sqrt{9 - 0.8x^2 - 0.1y^2}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{3^2 - 0.8x^2 - 0.1y^2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-0.1y}{\sqrt{9 - 0.8x^2 - 0.1y^2}} \end{pmatrix}$$

だから、 $x = -0.5, y = 1.5$ における、**接平面**を形成する 2 個のベクトルは

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.137 \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.051 \end{bmatrix}$$

2 個の単位ベクトルは

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \begin{bmatrix} 0.991 \\ 0 \\ 0.135 \end{bmatrix}, \quad \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.999 \\ -0.051 \end{bmatrix}$$

また、その**法線ベクトル**と法線単位ベクトルは

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} -0.137 \\ 0.051 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} -0.135 \\ 0.051 \\ 0.99 \end{bmatrix}$$

1 2 . 3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{3^2 - 2x^2 + 0.2y^2} \end{pmatrix}$$

$$x := -0.5 \quad y := 1.8$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d}{dx} \left[\sqrt{(3^2 - 2x^2) + 0.2y^2} \right] \end{bmatrix} \quad \vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.331 \end{bmatrix} \quad \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \begin{bmatrix} 0.949 \\ 0 \\ 0.314 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{d}{dy} \left[\sqrt{(3^2 - 2x^2) + 0.2y^2} \right] \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.119 \end{bmatrix} \quad \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.993 \\ 0.118 \end{bmatrix}$$

$$C := \vec{A} \times \vec{B} \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} -0.331 \\ -0.119 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{n} := \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} -0.312 \\ -0.112 \\ 0.943 \end{bmatrix}$$

1 2 . 4 Show that $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$. 略

1 2 . 5 ダムの面が次の式であらわされる。

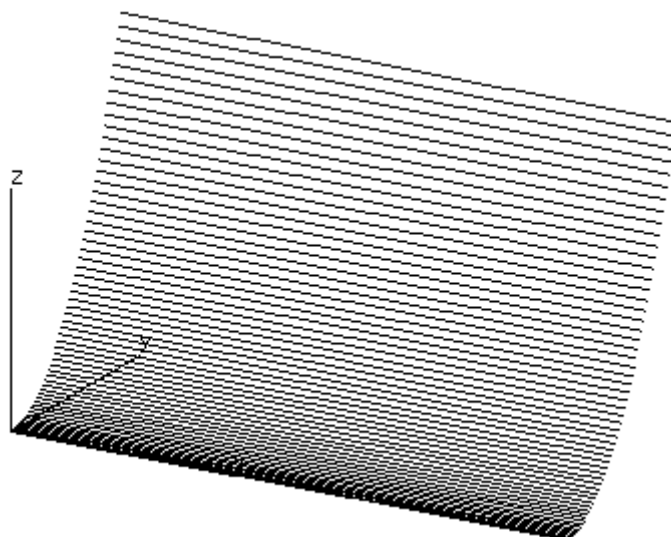
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y^2 \end{pmatrix}$$

領域 $0 \leq x \leq 5$ 、 $0 \leq y \leq \sqrt{3}$ において、水によってダム全体に発生する力を求

める。なお、大気圧力 Atmospheric pressure は 100000 Pa とする。

(Hint) 自由水面 Free surface は $z = 3(\text{m})$ にあるから、 z における絶対圧力は

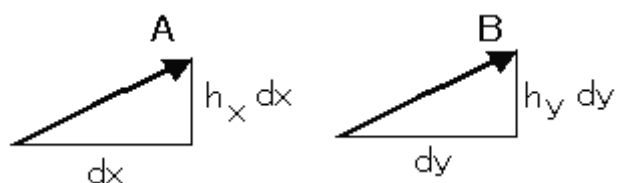
$$p = 130000 - 9.8 \times 10^3 z = 130000 - 9.8 \times 10^3 y^2$$



$x-y$ を変数として面で積分しよう。関数 h を次のように定義する。 $h = y^2$

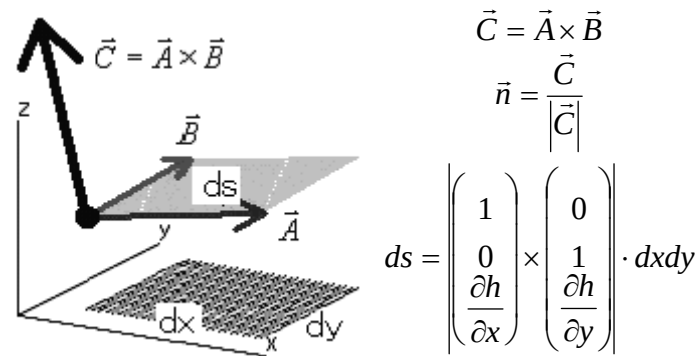
$\vec{A}$: ダムの面を $z-x$ 面に並行にきった接線 Tangent line

$\vec{B}$: ダムの面を $y-z$ 面に並行にきった接線 Tangent line



$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot dx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \cdot dy$$

$\vec{C}$ 、 $\vec{n}$: ベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ で作る平面の法線ベクトル、法線単位ベクトル



圧力 p は法線ベクトルと反対方向に働くから (－) をつけて、

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_0^{\sqrt{35}} \int_0^0 (-p) \cdot \vec{n} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h_y \end{pmatrix} \right) \cdot dxdy = \int_0^{\sqrt{35}} \int_0^0 (-p) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \right|} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \right) \cdot dxdy \\ &= \int_0^{\sqrt{35}} \int_0^0 (-130000 + 9800y^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dxdy = \begin{pmatrix} 0 \\ 1700000 \\ -1000000 \end{pmatrix} \quad (\text{N}) \end{aligned}$$

```
!damcal04.bas 03-8-11
dim A(3),B(3),cross(3),f(3),pc(3),df(3)
let c=-9.8* 1 2 ^3
let k=1.3* 1 2 ^5
let dx=5/ 1 2 0
let dy=sqr(3)/ 1 2 0
def h(x,y)=y^2
for x=0 to 5 step dx
  for y=0 to sqr(3) step dy
    let z=h(x,y)
    let p=c*z+k
    let dhdx=0
    let dhdy=2*y
    let A(1)=1
    let A(2)=0
    let A(3)=dhdx
```

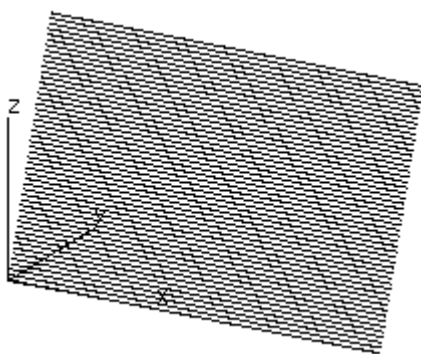
```
let B(1)=0
let B(2)=1
let B(3)=dhdy
let cross(1)=A(2)*B(3)-A(3)*B(2)
let cross(2)=A(3)*B(1)-A(1)*B(3)
let cross(3)=A(1)*B(2)-A(2)*B(1)
let p=-p
mat pc=p*cross
let dxdy=dx*dy
mat df=dxdy*pc
mat f=f+df
next y
next x
mat print f
END
```

12.6 ダムの面が次の式であらわされる。 ダムの面に働く圧力の大きさは $p(\vec{r}) = kd + c$ であらわされる。ここで d は $\vec{r}$ における深さである。ダムへの圧力による力を求めよう。 ただし、大気圧を 100000 Pa とする。

(1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3y \end{pmatrix}$$

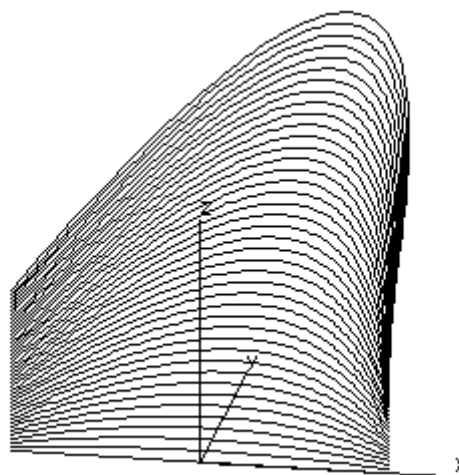
$$0 \leq x \leq 25, \quad 0 \leq y \leq \frac{25}{3}$$



(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 100z - zx^2 \\ z \end{pmatrix}$$

$$-10 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq z \leq 100$$



(1)

$$100000 + 9.8 \cdot 10^3 \cdot 25 = 3.45 \cdot 10^5$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ fx \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ fy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -fx \\ -fy \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{\frac{25}{3}} \int_0^{25} (9800 \cdot 3 \cdot y - 345000) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} dx dy$$

$$\int_0^{\frac{25}{3}} \int_0^{25} (9800 \cdot 3 \cdot y - 345000) \cdot (-3) dx dy = 1.391 \cdot 10^8 \quad \blacksquare$$

$$\int_0^{\frac{25}{3}} \int_0^{25} (9800 \cdot 3 \cdot y - 345000) \cdot (1) dx dy = -4.635 \cdot 10^7 \quad \blacksquare$$

(2)

$$100000 + 9.8 \cdot 10^3 \cdot 100 = 1.08 \cdot 10^6 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ f_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ -1 \\ f_z \end{bmatrix}$$

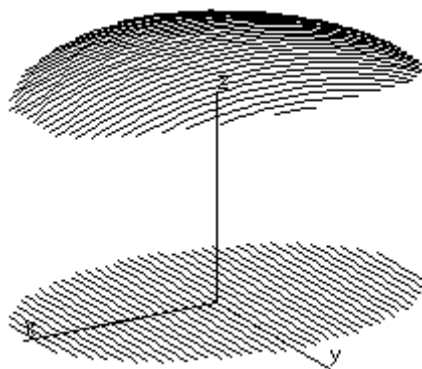
$$\int_0^{100} \int_{-10}^{10} (9800z - 1.08 \cdot 10^6) \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot z \cdot x \\ -1 \\ 100 - x^2 \end{bmatrix} dx dz$$

$$\int_0^{100} \int_{-10}^{10} (9800z - 1.08 \cdot 10^6) \cdot (-2 \cdot z \cdot x) dx dz = 0$$

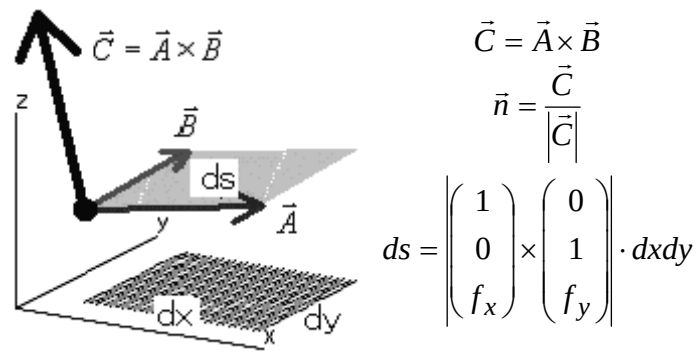
$$\int_0^{100} \int_{-10}^{10} (9800z - 1.08 \cdot 10^6) \cdot (-1) dx dz = 1.18 \cdot 10^9$$

$$\int_0^{100} \int_{-10}^{10} (9800z - 1.08 \cdot 10^6) \cdot (100 - x^2) dx dz = -7.867 \cdot 10^{10}$$

12.7 壁面が楕円形 ($a=90\text{ m}$ 、 $b=60\text{ m}$) のドームがある。屋根は球状で半径 $r=150\text{ m}$ 、球の中心は $(x=0, y=0, z=-120)\text{ m}$ にある。ドームの屋根の面積を求めよ。



(ヒント)



(1) **A**と**B**をもとめよ

まず、屋根をあらわす関数

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{150^2 - x^2 - y^2} - 100 \end{bmatrix}$$

$$f_x := \frac{-1}{\sqrt{22500 - x^2 - y^2}} \cdot x \quad f_y := \frac{-1}{\sqrt{22500 - x^2 - y^2}} \cdot y$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{bmatrix}$$

(2) $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ をもとめる。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(|f_x|)^2 + (|f_y|)^2 + 1}$$

(3) 屋根の面積をもとめる積分式をもとめる。

$$S = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad \text{積分領域 } Q \text{ は } \left(\frac{1}{90^2} + \frac{1}{60^2} \leq 1 \right)$$

(4) 数値計算プログラムは

```
!domeca01.bas 02-7-14
dim A(3),B(3),cross(3)
```

```
let dx=0.5
```

```
let cross(1)=A(2)*B(3)-A(3)*B(2)
let cross(2)=A(3)*B(1)-A(1)*B(3)
let cross(3)=A(1)*B(2)-A(2)*B(1)
```

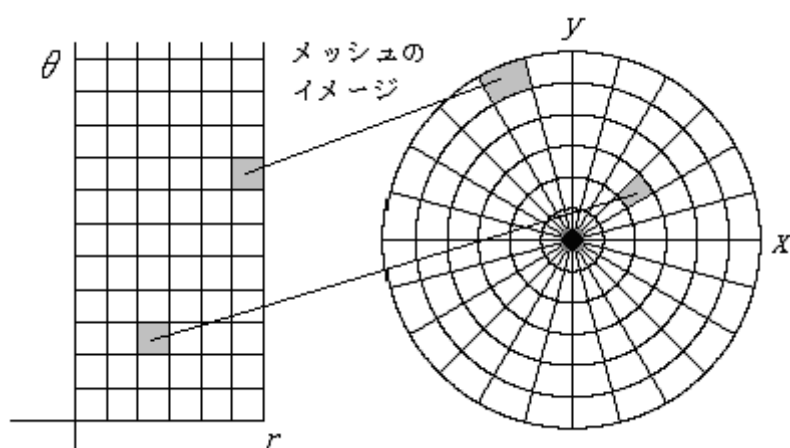
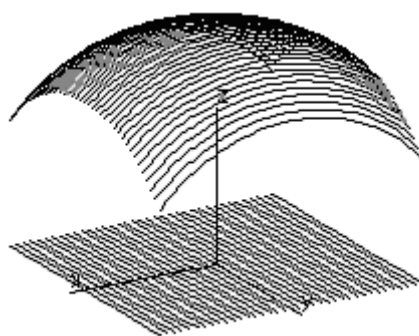


```

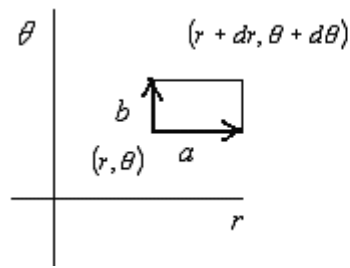
let dy=0.5
def f(x,y)=sqr(150^2-x^2-y^2)- 1 2 0
for x=-90 to 90 step dx
  for y=-60 to 60 step dy
    if x^2/90^2+y^2/60^2<1 then
      let fx=(f(x+dx,y)-f(x,y))/dx
      let fy=(f(x,y+dy)-f(x,y))/dy
      let A(1)=1
      let A(2)=0
      let A(3)=fx
      let B(1)=0
      let B(2)=1
      let B(3)=fy
      let mag=sqr(cross(1)^2+cross(2)^2+cross(3)^2)
      let S=S+mag*dx*dy
    end if
  next y
next x
print S
END

```

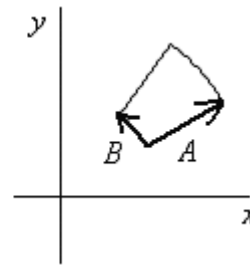
1 2 . 8 The roof of the dome is the portion of the sphere with the radius 150 m and the center (0,0,-120) m. Find the surface area of the roof over the region $(-30 \leq x \leq 30, -30 \leq y \leq 30)$.



座標変換とヤコビアン



(a) $r - \theta$ 座標



(b) $x - y$ 座標

jacob01

座標変換 Change of coordinate systems で積分計算 Integration が容易になる場合がある。

たとえば、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ のような Change of coordinate systems をおこなった場合、左辺の計算がしんどくて、右辺のほうが楽な場合がある。

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{\theta_1, r_1}^{\theta_2, r_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \cdot dr d\theta$$

では、なぜ上の公式か？ 上の図 (a) において、長方形 Rectangle の辺 a 、 b は、(b) において歪んだ形の辺 A 、 B になる。

$$\vec{A} = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \hat{j} \right) \cdot dr \quad , \quad \vec{B} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \hat{j} \right) \cdot d\theta$$

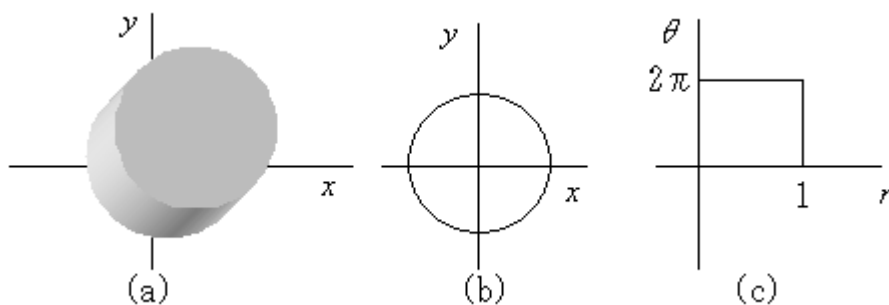
(a) における微小な面積 $dr d\theta$ の (b) での面積は $|\vec{A} \times \vec{B}|$ である。

$$f(x, y) dx dy = f(r \cos \theta, r \sin \theta) |\vec{A} \times \vec{B}|$$

で行う。 もちろん、 $|\vec{A} \times \vec{B}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \cdot dr d\theta$ である。 この行列式

Determinant を**ヤコビアン** Jacobian という。

12.9



半径 1 で、高さ 1 の円筒形がある。面の積分で体積を求めて見よう。

(Hint) $f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 1$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

ゆえに、

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 1r \cdot dr d\theta = \pi$$

右辺で計算するか、左辺で計算するかは、諸君の決めることだ。

12.10 Graph the function

$$z = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = x + 1 = r \cos \theta + 1$$

Evaluate the integral over the region ($x^2 + y^2 \leq 1$).

12.8 の問題の応用（筆算で解ける場合） ドームの屋根が中心(0,0,h) m に

ある半径 R m の球の一部である。 ドームの敷地が $(x^2 + y^2 \leq r^2$ ただし

$r < R$) の場合ドームの面積 S をもとめよ。

(ヒント)
$$f = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - h$$

$$S = \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

座標変換する。 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ したがって $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$

また、 $f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{-r \cos \theta}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ $f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{-r \sin \theta}{\sqrt{R^2 - r^2}}$

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

したがって、

$$S = \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r f(r, \theta) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\theta = 2\pi \int_0^r \frac{Rr dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

ゆえに、

$$S = 2\pi R \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right)$$