

第11章 ベクトル場とスカラー場

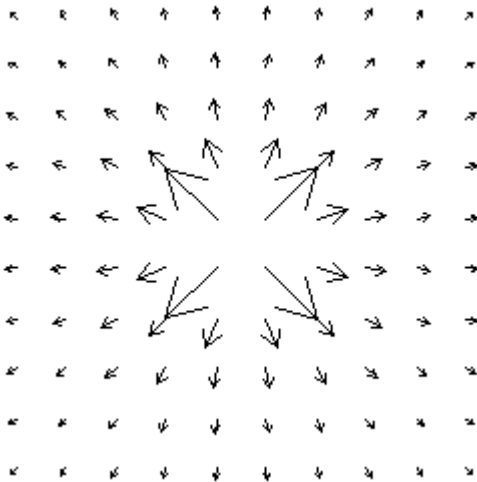
11.1 速度ベクトル $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を与えることによって種々のベクトル場を描くことができる。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

極座標に変換すると

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

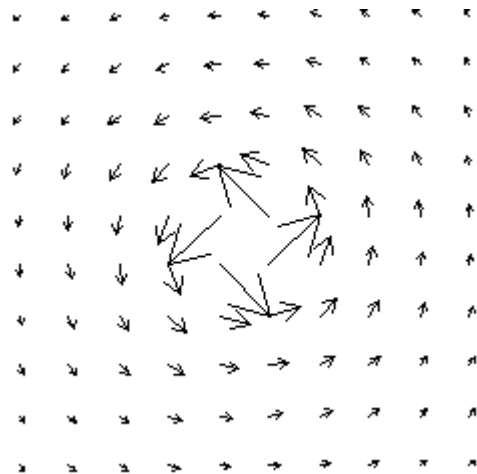
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cos \theta \\ \frac{1}{r} \sin \theta \end{pmatrix}$$



極座標に変換すると

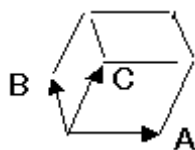
$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \sin \theta \\ \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$



!field204.bas

11.2 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ を証明せよ。



上のような、 $\vec{A}$ と $\vec{B}$ と $\vec{C}$ を稜線とする平行6面体を考えよう。

$\vec{B}$ と $\vec{C}$ が底辺（平行四辺形）として、その面積を s とすると

$$(\vec{B} \times \vec{C}) = s \cdot \hat{e}$$

ただし、 $\hat{e}$ は $\vec{B} \times \vec{C}$ の単位ベクトルである。

また、 $\vec{A}$ の先端から $\vec{B}$ と $\vec{C}$ がつくる底辺におろす垂線の長さを h とすると、この平行6面体の体積 V は $V=hs$ である。

しかるに、 $h = \vec{A} \cdot \hat{e}$ だから

$$V = hs = (\vec{A} \cdot \hat{e}) \cdot s = \vec{A} \cdot (s \cdot \hat{e}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

この平行6面体において稜線 $\vec{A}$ と $\vec{B}$ と $\vec{C}$ は平等に扱うことができるから、その体積 V は

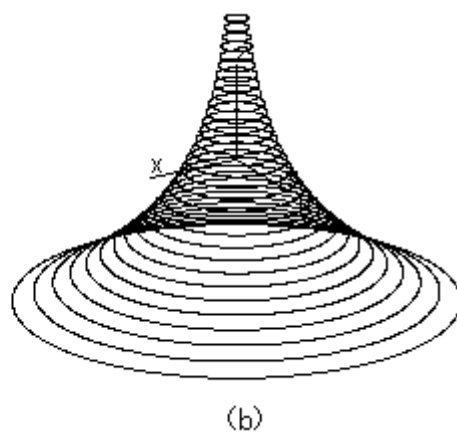
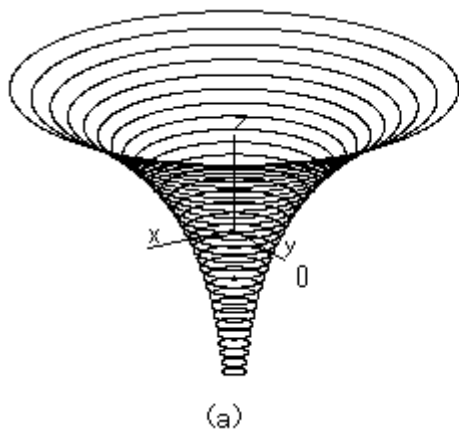
$$V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

体積を各ベクトルの成分から計算するには

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

2次元完全流体の速度ポテンシャルと流れのベクトル場

2D 流体において、 x 、 y の位置によって定まる**スカラー値**が $f(x, y)$ であらわされるとき、このような x - y 平面を**スカラー場**という。次の図は（ a ）**吹き出し**と（ b ）**吸い込み**の**ポテンシャル関数**の Image をあらわしたものである。非粘性非圧縮性流体は、ポテンシャル $f(x, y)$ の低いところから高いところに向かって流れる。



f201.bas

(x, y) における、ポテンシャルの**最大傾斜**が流れの速度ベクトルとなる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(x, y) にわたって存在する速度ベクトル $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ はベクトル場を形成する。

11.3 ポテンシャル関数の等高線と速度のベクトル場を描く。

$$(1) \quad f(x, y) = 2 \log(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (2) \quad f(x, y) = -2 \log(\sqrt{x^2 + y^2})$$

極座標に変換すると

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Potential function の等高線は

$$f(x, y) = 2 \log r = C$$

速度は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ \frac{2y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

極座標に変換すると

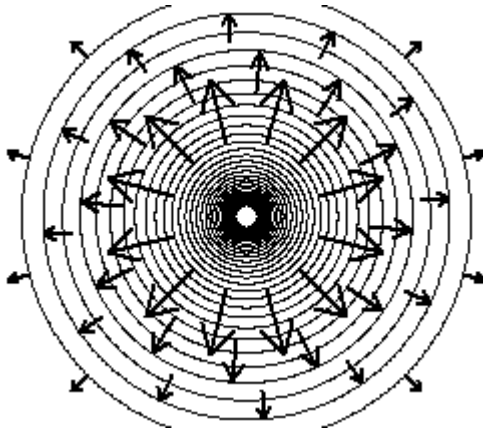
$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Potential function の等高線は

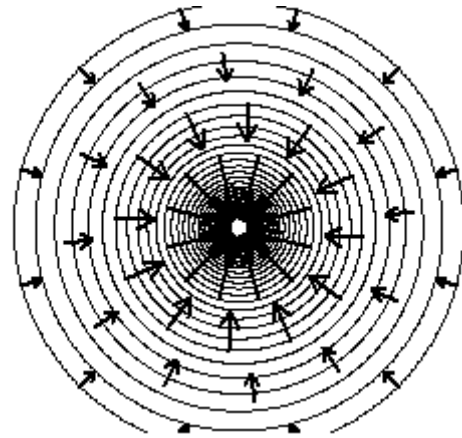
$$f(x, y) = -2 \log r = C'$$

速度は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2x}{x^2 + y^2} \\ \frac{-2y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$



吹き出し fg13201b.bas



吸い込み

11.4

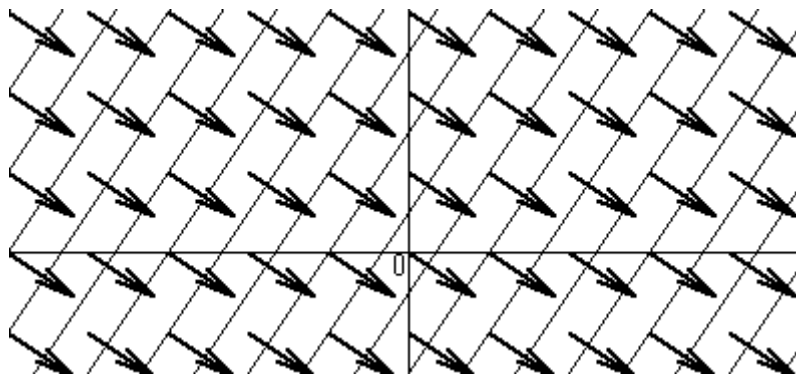
ポテンシャル関数の等高線は

$$f(x, y) = 0.3x - 0.2y = C$$

速度ベクトルは

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

これらから、Potential function の等高線と Vector field は次のようになる。



サンプルプログラム

```
!tora1104.bas 05-11-2
set window -10,10,-10,10
set axis color 1
draw axes(100,100)
```

```

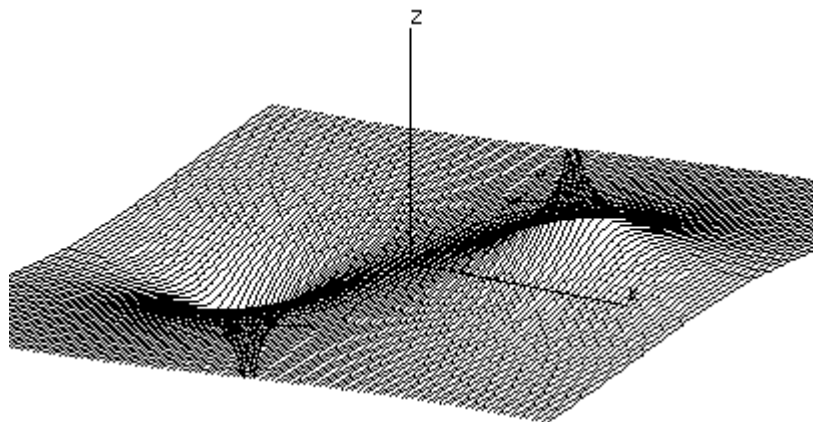
for c=-25 to 25 step 2
  for x=-10 to 10 step 0.1
    let y=0.3*x/0.2-c
    plot lines: x,y;
  next x
  plot lines
next c

set line width 2
for x=-10 to 10 step 2
  for y=-10 to 10 step 2
    let theta=atn(-0.2/0.3)
    draw arrow with rotate(theta)*scale(2)*shift(x,y)
  next y
next x
END
!-----
external picture arrow
OPTION ARITHMETIC COMPLEX
plot 0,0;1,0
plot 1-0.5,0.1;1,0;1-0.5,-0.1
end picture

```

流体は Scalar field では、Potential の低いところから高いところに向かって流れる。
 (x, y) における、Potential の最大傾斜が流れの Velocity vector となる。
 (x, y) にわたって存在する Velocity vector は Vector field を形成する。

1 1 . 5 $(-1.5, 0)$ に Source あり、 $(1.5, 0)$ に Sink がある場合の Potential の Scalar field を地形にたとえるならば図のようになる。



まず、本題の Potential function

$$f(x, y) = 0.3 \log \left(\sqrt{(x+1.5)^2 + y^2} \right) - 0.3 \log \left(\sqrt{(x-1.5)^2 + y^2} \right)$$

の等ポテンシャル線を考える。

$$f(x, y) = 0.3 \log \frac{\sqrt{(x+1.5)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1.5)^2 + y^2}} = \text{const.}$$

から、

$$\frac{(x+1.5)^2 + y^2}{(x-1.5)^2 + y^2} = \text{const.} = C$$

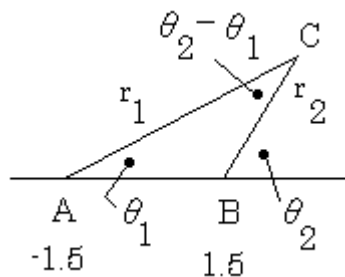
変形して、

$$\left(x - 1.5 \frac{C+1}{C-1} \right)^2 + y^2 = 1.5^2 \frac{4C}{(C-1)^2}$$

が得られ、これは等ポテンシャル線は x 軸上に中心があり、点 A、B から円周上の点までの距離の比が一定の円群となることをしめしている。

次に速度のベクトル場はどうか。

これには、複素関数を思い出そう。



点 A に単独に吹き出しがある場合の複素ポテンシャルは

$$w_1 = 0.3 \log z_1 \quad z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

点 B に単独に吸い込みがある場合の複素ポテンシャルは

$$w_2 = -0.3 \log z_2 \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

それゆえ、これらをかさねると、

$$w = w_1 + w_2 = 0.3 \log \frac{z_1}{z_2}$$

となる。 したがって、

$$w = 0.3 \log \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = 0.3 \left(\log \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \right)$$

複素ポテンシャル $w = \phi + i\psi$ の実部 ϕ がポテンシャル関数で虚部 ψ が流れ関数であることを思いだすと、速度ポテンシャルと流れ関数は

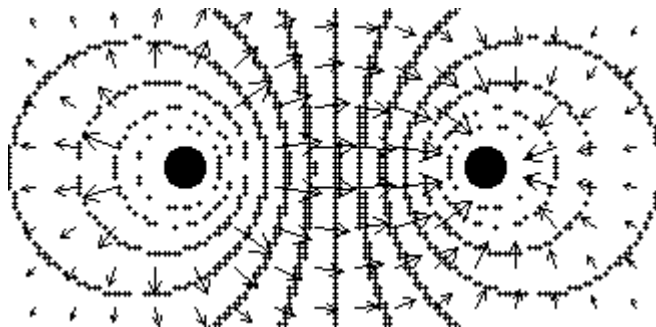
$$\phi = 0.3 \log \frac{r_1}{r_2}$$

$$\psi = 0.3(\theta_1 - \theta_2)$$

$\phi = \text{const}$ とすれば $r_1/r_2 = \text{const}$ となり、等ポテンシャル線は x 軸上に中心があり、点 A、B から円周上の点までの距離の比が一定の円群となる。

流れ線は $\psi = \text{const}$ とすれば、 $\theta_1 - \theta_2 = \text{const.}$ となり、流れ線は y 軸上に中心があり、点 A、B を通る円群である。

これらを思い浮かべながら、鉛筆でグラフを描こう。



さらに、プログラムすることによって、鉛筆でグラフが正しく描かれたか検査しよう。

サンプルプログラム

!eq13201b.bas 03-01-17

!equi potential lines & the vector field
!source and sink

```
set window -5,5,-5,5
!-----関数の定義-----
def f1(x,y)=0.3*log(sqr((x+1.5)^2+y^2))
def f2(x,y)=-0.3*log(sqr((x-1.5)^2+y^2))
def f(x,y)=f1(x,y)+f2(x,y)
!-----dx,dy の値-----
let dx=0.05
let dy=0.05
!-----速度の定義-----
def fx(x,y)=(f(x+dx,y)-f(x,y))/dx
def fy(x,y)=(f(x,y+dy)-f(x,y))/dy

draw disk with scale(0.2)*shift(1.5,0)
draw disk with scale(0.2)*shift(-1.5,0)
! -----
set line width 3
for k=-0.6 to 0.6 step 0.1
  for x=-5.001 to 5 step dx
    for y=-5.001 to 5 step dy
      let dk=0.03/(x^2+y^2+1.5)
      if f(x,y)>k-dk and f(x,y)<k+dk then
        plot lines:x,y
      end if
    next y
  next x
next k
let dx=0.01
let dy=0.01
set line width 1
set line color 1
! -----
for x=-3 to 3 step 0.4
  for y=-3 to 3 step 0.4
    !-----勾配をかかせる。
    if (x+1.5)^2+y^2>0.5 and (x-1.5)^2+y^2>0.5 then
      let kx=fx(x,y)
      let ky=fy(x,y)
      call drawvectorarrow
    end if
  next y
next x
!*****
plot lines
sub drawvectorarrow
  let leng=sqr(kx^2+ky^2)
  let theta=angle(kx,ky)
  let x1=x
  let y1=y
  draw arrow with rotate(theta)*scale(leng)*shift(x,y)
end sub

END
```



```
!-----
external picture arrow
let aa=30/180*pi
plot 0,0;1,0
plot 1,0;1-0.5*cos(aa),-0.5*sin(aa)
plot 1,0;1-0.5*cos(aa),0.5*sin(aa)
end picture
```

11.7 関数の $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算する。

$$(1) \quad f(x, y) = \log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

つぎに、

$$\text{微分公式} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

をつかって、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

となって、この関数はラプラスの微分方程式を満足する。

この場合、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

で、この関数のつくるベクトル場は、2次元流れにおいては**連続の式**を満足する。

$$(2) \quad f(x, y) = e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)e^{xy}$$

11.8 力の場合 $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ を反時計回りに半径1の円周を(1,0)から(1,0)まで動く場合になされる仕事を計算する。

この場合、

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{x^2+y^2=1} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \hat{i} + \frac{y}{x^2+y^2} \hat{j} \right) (dx \cdot \hat{i} + dy \cdot \hat{j}) = \int_{(1,0)}^{(1,0)} (xdx + ydy) = 0$$

積分経路が円の場合、極座標を使うととってもわかりやすい。 半径1の場合、

$$x = \cos \theta \quad dx = -\sin \theta \cdot d\theta$$

$$y = \sin \theta \quad dy = \cos \theta \cdot d\theta$$

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{\theta=0 \rightarrow 2\pi} (\cos \theta \cdot \hat{i} + \sin \theta \cdot \hat{j}) (dx \cdot \hat{i} + dy \cdot \hat{j}) = \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta \cdot d\theta + \sin \theta \cos \theta \cdot d\theta) = 0$$

11.9 力の場合 $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ を反時計回りに半径1の円周を(1,0)から(1,0)まで動く場合になされる仕事を計算する。 この場合、

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{x^2+y^2=1} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \hat{j} \right) (dx \cdot \hat{i} + dy \cdot \hat{j}) = \oint_{x^2+y^2=1} (-ydx + xdy)$$

積分は、

$$I = \int_1^{-1} (-\sqrt{1-x^2}) dx + \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy - \int_1^{-1} (-\sqrt{1-y^2}) dy + \int_{-1}^0 \sqrt{1-y^2} dy$$

で、

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy + \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy + \int_{-1}^0 \sqrt{1-y^2} dy$$

となり、結局

$$I = 2\pi$$

となる。

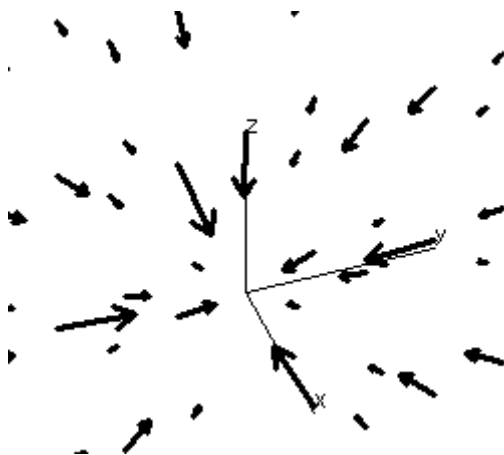
積分経路が円の場合、極座標を使うともっとわかりやすい。 半径1の場合、

$$x = \cos \theta \quad dx = -\sin \theta \cdot d\theta$$

$$y = \sin \theta \quad dy = \cos \theta \cdot d\theta$$

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\theta=0 \rightarrow 2\pi} (-\sin \theta \cdot \hat{i} + \cos \theta \cdot \hat{j}) (dx \cdot \hat{i} + dy \cdot \hat{j}) = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta \cdot d\theta + \cos^2 \theta \cdot d\theta) = 2\pi$$

11.10



スカラー場 $T(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ の関数を x, y, z で偏微分して勾配を計算す

る。 手始めに、 $\frac{\partial T}{\partial x}$ を計算する。

$$\text{微分公式} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

において、 $u=1$ 、 $v=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ おくと、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

同様に y 、 z についても計算を行って、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

11. 11 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ を計算する。

$$(1) \quad \phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$h = x^2 + y^2 + z^2$ とおくと、前の問題の答えから

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-x}{h^{3/2}} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-y}{h^{3/2}} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{-z}{h^{3/2}}$$

さらに、微分公式 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ を使って、 $u=-x$ 、 $v=h^{3/2}$ とおくと

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{3}{2} h^{1/2} \cdot 2x = 3x \cdot h^{1/2}$$

したがって

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{-h^{3/2} + x \cdot 3x \cdot h^{1/2}}{h^3} = \frac{-h^{3/2} + 3x^2 h^{1/2}}{h^3}$$

おなじようにして

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{-h^{3/2} + 3y^2 h^{1/2}}{h^3} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{-h^{3/2} + 3z^2 h^{1/2}}{h^3}$$

したがって

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{-3h^{3/2} + 3(x^2 + y^2 + z^2)h^{1/2}}{h^3} = 0$$

$$(2) \quad \phi(x, y, z) = e^{xyz}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = yze^{xyz} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = y^2 z^2 e^{xyz}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = zxe^{xyz} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = z^2 x^2 e^{xyz}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xye^{xyz} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = x^2 y^2 e^{xyz}$$

したがって

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) e^{xyz}$$

11.12 ポテンシャルエネルギー関数 $\phi(\vec{r}) = \frac{-1}{|\vec{r}|}$ で作られるベクトル場を

(1,1,1)から (2,2,2)まで動くときになされる仕事

(1) 経路は複数の直線 (1,1,1)→(1,1,2)→(1,2,2)→(2,2,2)

ポテンシャルエネルギー関数 $\phi(\vec{r}) = \frac{-1}{|\vec{r}|} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ によってつくられる力の

ベクトル場は

$$\vec{F} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$$

で、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \\ y/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \\ z/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \end{pmatrix}$$

となる。

なされる仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int_{A9}^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{(1,1,1)}^{(1,1,2)} \frac{-zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \int_{(1,1,2)}^{(1,2,2)} \frac{-ydy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \int_{(1,2,2)}^{(2,2,2)} \frac{-xdx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1+1+z^2}} \right]_1^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{1+y^2+2^2}} \right]_1^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2^2+2^2}} \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{9}} \right) = \frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

(2) 経路は 1 直線 $(1,1,1) \rightarrow (2,2,2)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dt \\ dt \\ dt \end{pmatrix} \quad \text{で、} \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = t/(3t^2)^{3/2} = \frac{1}{3^{3/2}t^2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = t/(3t^2)^{3/2} = \frac{1}{3^{3/2}t^2} \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = t/(3t^2)^{3/2} = \frac{1}{3^{3/2}t^2}$$

したがって、この経路にわたって、

$$\vec{F} = -\nabla\phi = -\frac{1}{3^{3/2}t^2}\hat{i} - \frac{1}{3^{3/2}t^2}\hat{j} - \frac{1}{3^{3/2}t^2}\hat{k}$$

この経路にわたってなされる仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int_{A9}^B \vec{F}(\vec{r}) \bullet d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F} \bullet (dx \cdot \hat{i} + dy \cdot \hat{j} + dz \cdot \hat{k}) = \int_1^2 \frac{-dt}{3^{3/2}t^2} + \int_1^2 \frac{-dt}{3^{3/2}t^2} + \int_1^2 \frac{-dt}{3^{3/2}t^2} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[\frac{1}{t} \right]_1^2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[\frac{1}{t} \right]_1^2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[\frac{1}{t} \right]_1^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$