第９章　　フーリエ変換とラプラス変換

９．３

出力関数が g(t) のシステムに周期関数 $e^{i\cdot\omega\cdot t}$ の入力を加えると、その出力はた

たみこみ　$u*g=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\cdot g(t-x)dx$

となる。

$$u*g=g*u$$

だから、出力 y (t) は

$$g*u=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot(t-x)}dx$$

となる。したがって、出力は

$$y(t)=e^{i\cdot\omega\cdot t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot x}dx$$

で、フーリエ変換では、

$$G(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}dt$$

であるから、結局

$$y(t)=e^{i\cdot\omega\cdot t}\cdot G(i\omega)\qquad \text{となる。}$$

$G(i\omega)$　は**周波数伝達関数** Frequency transfer function とよばれる。

$|G(i\omega)|$　　はゲイン Gain

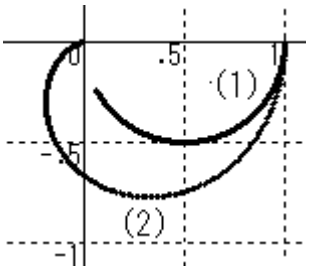
$\angle G(i\omega)$　　は位相 Phase

９．４

$i:=\sqrt{-1}$　　$R:=4$　　$C:=1000\cdot 10^{-6}$　　$\omega:=120\cdot\pi$

(1) $G := \dfrac{1}{R \cdot C \cdot i \cdot \omega + 1}$ $\quad |G| = 0.553$ $\quad \arg(G) \cdot \dfrac{180}{\pi} = -56.45$

(2) $G := \dfrac{1}{(i \cdot \omega)^2 + 1.5 \cdot i \cdot \omega + 1}$ $\quad |G| = 7.036 \cdot 10^{-6}$ $\quad \arg(G) \cdot \dfrac{180}{\pi} = -179.772$



ベクトル線図

```
!prb0904a.bas
option arithmetic complex
set window -2,2,-2,2
set axis color 1
draw grid(0.5,0.5)

let j=complex(0,1)
let R=4
let C=1000*10^(-6)
def G1(s)=1/(R*C*s+1)
def G2(s)=1/(s^2+1.5*s+1)

set line width 3
for w=0 to 1000 step 0.01
    let s=j*w
    let H1=G1(s)
    let H2=G2(s)

    plot lines:Re(H1),Im(H1)
    plot lines:Re(H2),Im(H2)
next w

END
```

９．６

（１） $X(s) = G(s) \cdot 1 = \dfrac{1}{2s+1}$ のフーリエ逆変換は

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{st}}{2s+1} ds = \frac{1}{4\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{st}}{s+\frac{1}{2}} ds = \frac{2\pi i}{4\pi i} e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \quad .$$

（２） $G(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$

したがって、 $x(t)=e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$.

（３） $G(s)=\frac{1}{s^2+4}=\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{s-2i}-\frac{1}{s+2i}\right)$

したがって、 $x(t)=\frac{1}{4i}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)=\frac{1}{2}\sin(2t)$.

９．７ （１）

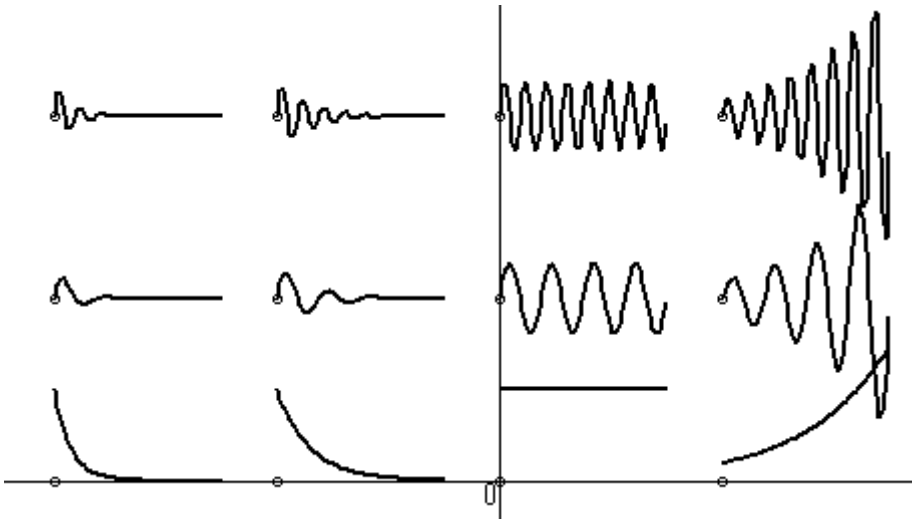
$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{st}}{s^2+s+16}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{st}}{(s-\alpha)(s-\beta)}ds=\frac{2\pi i}{2\pi i\cdot(\alpha-\beta)}(e^{\alpha\cdot t}-e^{\beta\cdot t})$$

$s^2+s+16=0$ の根は $\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{63}}{2}i$ and $\beta=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{63}}{2}i$.

ゆえに $x(t)=\frac{2}{\sqrt{63}}e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\sin(\frac{\sqrt{63}}{2}t)$.

（２） $x(t)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$

$g(s)=\frac{1}{G(s)}$ とおく。 $g(s)=0$ を特性方程式という。 特性方程式の根の位置によって応答の性質が決定される。 根の位置とインパルス応答の性質を次のような図にしてみよう。 下半分の共役複素数は省いている。



graph03.bas

９．８　　ステップ関数は $f(t)=\begin{cases}1...(t\geq 0)\\0...(t<0)\end{cases}$

したがって、そのラプラス変換は

$$L(s)=\int_0^\infty 1\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{s}\left[-e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

９．９　次の公式を利用する。

$$\int_{\sigma-i\cdot\infty}^{\sigma+i\cdot\infty}\frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)}ds=\frac{1}{ab}\left(1-\frac{be^{-at}}{b-a}+\frac{ae^{-bt}}{b-a}\right)$$

とくに a と b が複素数の場合、$a=\alpha+i\beta$ 、 $b=\alpha-i\beta$ とすると、

$$I=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{-\alpha\cdot t}\cos\beta t-\frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha\cdot t}\sin\beta t\right)\quad .$$

ステップ応答は伝達関数に $\frac{1}{s}$ をかけたものだから、

（１）　$G(s)\frac{1}{s}=\frac{1}{(s+1)(s+2)s}$　ゆえに、$x(t)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$

（２）　$G(s)\frac{1}{s}=\frac{1}{(s^2+s+16)s}$、$\alpha=\frac{1}{2}$ 、$\beta=\frac{\sqrt{63}}{2}$　だから、

$$x(t)=\frac{1}{18}\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{63}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{63}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{63}}{2}t\right)$$

９．１０

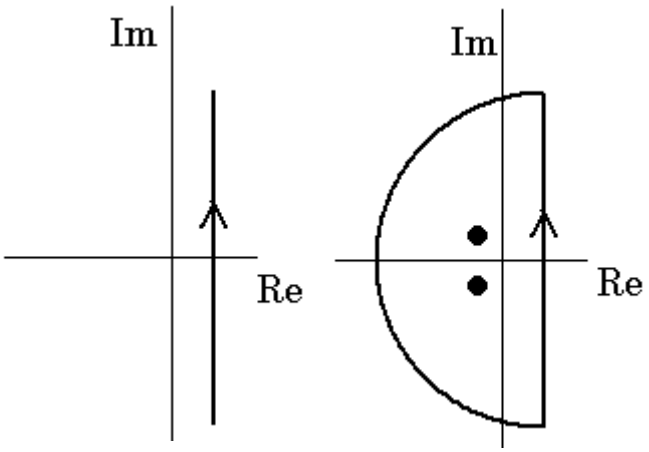
$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}G(s)\cdot e^{st}ds$$

上の方程式はラプラス逆変換である。

実数 a は G(s)のすべての特異点の実部よりも大きくなければならない。

直接の積分は難しいが、もし $\lim_{s\to\infty} G(s) \to 0$ の場合、積分の経路が、左半分の面で、きわめて大きな半径 R の半円で閉じることができる。

もし R が十分大きく、半円の経路に沿って $\int G(s)e^{st}ds \to 0$ であるならば、右の二つの経路は等価である。



ラプラス逆変換の経路　　等価の経路

複素平面での積分の経路

複素平面上での閉じた経路での積分は次のように計算できる。

$$\oint \frac{f_1(z)}{z-a_1}dz + \oint \frac{f_2(z)}{z-a_2}dz + ... = 2\pi \cdot i \cdot (f_1(a) + f_2(a_2) + ...)$$

ゆえに、時間関数 g(t) が、

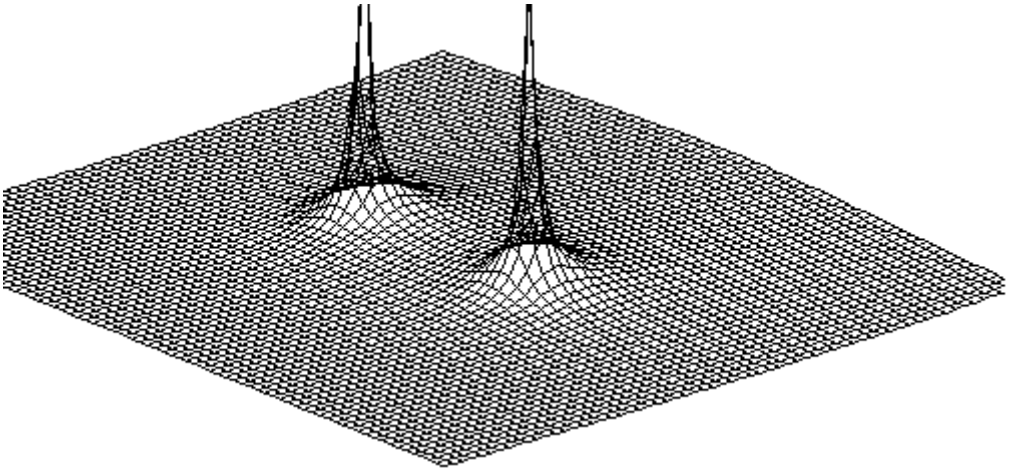
$$g(t) = f_1(a_1) + f_2(a_2) + ...$$

ともとめられる。

$f_1(a_1), f_2(a_2), ...$ は、複素平面の左半分における $G(s)e^{st}$ の特異点の留数である。

ラプラス逆変換を行うとき、通常 $G(s)$ を次のように開く。

$$G(s)e^{st} \to \frac{f_1(s)e^{st}}{s-a_1} + \frac{f_2(s)e^{st}}{s-a_2} + ...$$



regla05.bas

An image of $\left|\dfrac{e^{s}}{s^{2}+s+1}\right|$