

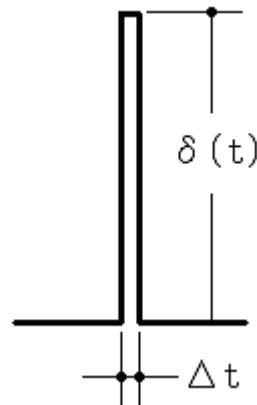
## 第7章 フーリエ変換

フーリエペア ( Fourier Pair )

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

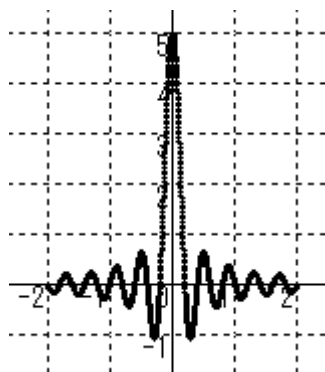
7 . 3      本題に入る前にまずはディラック関数 ( インパルス ) のイメージ



$$\delta(t) \cdot \Delta t = 1$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$\delta(t)_{t=0} = \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



近似計算でのイメージ

ディラック関数（インパルス）のフーリエ変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = 1$$

逆変換すると

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

$t$  と  $\omega$  を入れ替えると

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \omega \cdot t} dt$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \omega \cdot t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$

対称性から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$

これをしっかり覚える。

それと、もうひとつ  $f(t) = e^{-a|t|}$  のフーリエ変換

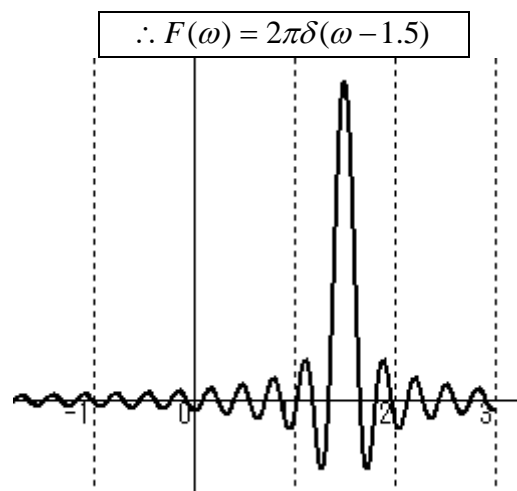
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt \\ &= \left[ \frac{1}{a - i\omega} e^{(a - i\omega)t} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{1}{-a - i\omega} e^{-(a + i\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a - i\omega} + \frac{1}{a + i\omega} \end{aligned}$$

$$= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

ところで、 $a \rightarrow +0$  で上の式は  $\frac{2a}{a^2 + \omega^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = 2\pi\delta(\omega)$

7 . 4 ( 3 )  $f(t) = e^{i \cdot 1.5t}$  のフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot 1.5 \cdot t} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot (\omega - 1.5) \cdot t} dt$$



一般に  $f(t) = e^{i \cdot a \cdot t} \quad F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - a)$

$f(t) = e^{-i \cdot a \cdot t} \quad F(\omega) = 2\pi\delta(\omega + a)$

7 . 5

( 1 )  $f(t) = \cos 3t = \frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} \quad \therefore F(\omega) = \pi\delta(\omega - 3) + \pi\delta(\omega + 3)$

( 2 )  $f(t) = \sin 3t = \frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2i} \quad \therefore F(\omega) = -i\pi\delta(\omega - 3) + i\pi\delta(\omega + 3)$

( 3 )  $f(t) = \begin{cases} 1 \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases}$  ステップ関数は  $f(t) = \begin{cases} e^{-at} \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases} \quad a \rightarrow 0 \quad \text{で近似}$

$$F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{a}{a^2+\omega^2} - \frac{i\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$a \rightarrow +0 \quad \text{で} \quad \frac{a}{a^2+\omega^2} \rightarrow \pi\delta(\omega) \quad , \quad -\frac{i\omega}{a^2+\omega^2} \rightarrow \frac{1}{i\omega}$$

$$\text{ゆえに、} \quad F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$

$$(4) \quad f(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \quad (\text{for } t \geq 0) \quad f(t) = 0 \quad (\text{for } t < 0)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-\left(\frac{1}{2}+i\omega\right)t}}{-i\omega - \frac{1}{2}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2i\omega + 1}$$

$$(5) \quad f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \quad (\text{for } t \geq 0) \quad f(t) = 0 \quad (\text{for } t < 0)$$

$$\text{一般式} \quad f(t) = \begin{cases} e^{-at} \sin(bt) \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases} \quad \text{でもとめる。}$$

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \left( e^{-(a+i\omega-ib)t} - e^{-(a+i\omega+ib)t} \right) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i} \left[ -\frac{e^{-(a+i\omega-ib)t}}{a+i\omega-ib} + \frac{e^{-(a+i\omega+ib)t}}{a+i\omega+ib} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2i} \frac{ib+ib}{(a+i\omega)^2+b^2} = \frac{b}{(a+i\omega)^2+b^2} \\ &= \frac{b}{(a+i\omega)^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2-\omega^2+2ia\omega} \end{aligned}$$

$$(6) \quad f(t) = \cos 3t \quad (\text{for } t \geq 0) \quad f(t) = 0 \quad (\text{for } t < 0)$$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos 3t \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases} \quad \text{で近似して } a \rightarrow 0 \text{ とする。}$$

$$F(\omega) = \frac{i\omega}{3^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega-3) + \delta(\omega+3)]$$

$$(7) \quad f(t) = \sin 3t \quad (\text{for } t \geq 0) \quad f(t) = 0 \quad (\text{for } t < 0)$$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} \sin 3t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad \text{で近似して } a \rightarrow 0 \text{ とする。}$$

$$F(\omega) = \frac{3}{3^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2i} [\delta(\omega - 3) - \delta(\omega + 3)]$$

## 7.6 逆フーリエ変換

$$(1) \quad F(\omega) = \pi \{ \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1) \}$$

$$(2) \quad F(\omega) = -i\pi \{ \delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1) \}$$

$$(3) \quad F(\omega) = \frac{1}{5 \cdot i\omega + 1}$$

$$(4) \quad F(\omega) = \frac{1}{(i\omega + 2)(i\omega + 3)}$$

$$(5) \quad F(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 + (i\omega) + 1}$$

(ヒント)

(1) ~ (2) は 7.5 を参考にして考えよ。

(3) ~ (5) では

$$s = i\omega \quad \text{を代入すると} \quad d\omega = \frac{ds}{i} \quad \text{。}$$

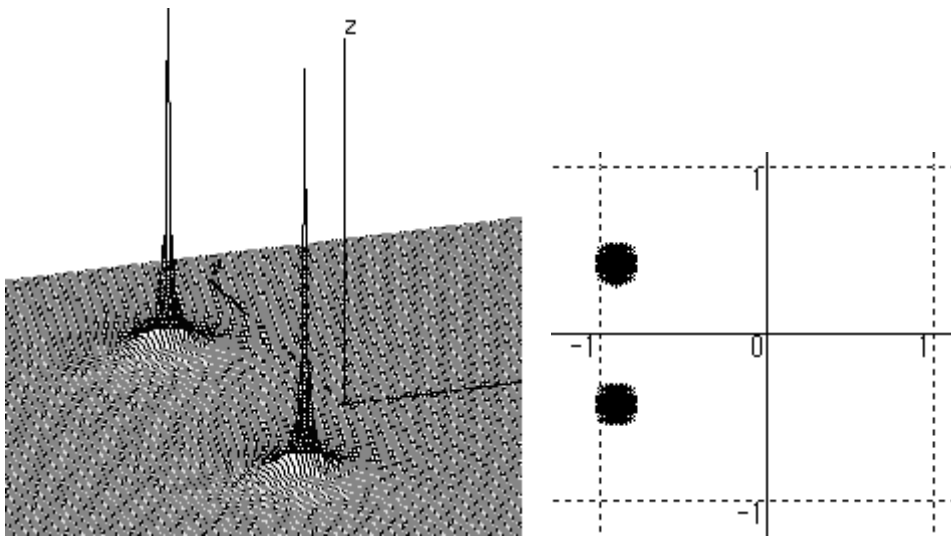
逆フーリエ変換に  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t} d\omega$  の代わりに

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(s) \cdot e^{s \cdot t} ds \quad \text{を使え。} \quad 4.8 \sim 4.9 \text{ 参照。}$$

## 伝達関数

$$G = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}$$

上の伝達関数の分母が0となるような  $s$  の値（根）は極と言って、その位置はこのシステムの性質をあらわす。では、その根の位置を複素平面上で求めて見よう。複素平面をスキャンし、まず、伝達関数の尖がり具合を見てみる。



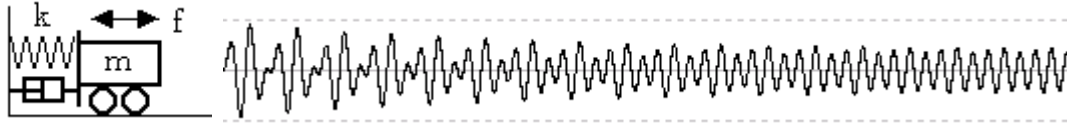
複素平面の左半分に2個 根がありそうだ。 近似値を探ろう。

## サンプルプログラム

```
!根 01.bas  2nd order system
option arithmetic complex
set window -2,2,-2,2
draw grid with scale(1,1)
let m=1
let k=1
let b=1.8
let i=complex(0,1)

for x=-5 to 2 step 0.02
  for y=-2 to 2 step 0.02
    let s=x+i*y
    if abs(1/(m*s^2+b*s+k))>10 then
      plot points:x,y
    end if
  next y
next x
END
```

## 7.7 周波数応答



上図は質量、バネ、ダンパーで構成されるシステム。

質量に一定の周期的な力  $f$  を加える。 過渡的な段階を過ぎると、振動は一定になる。

最初の段階での質量の位置  $x$  の時間  $t$  にたいする変化は過渡応答。

十分時間がたった  $x$  の変化は定常応答。

周期的な力  $f$  の入力にたいする位置  $x$  の出力は周波数応答。

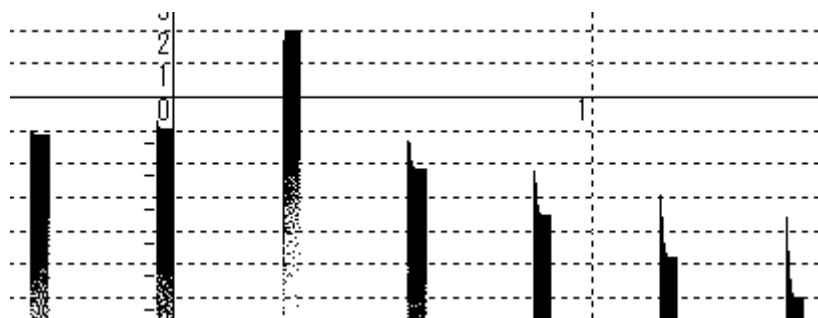
上図で  $m = 1$  [kg]、 $c = 0.05$  [Ns/m]、 $k = 4$  [N/m] のシステムにたいし、

$$f = \sin(\omega \cdot t)$$

の入力を与える。  $\omega$  の値を 0.5、1、2、4、8、16、32 [rad/s] として順番に周波数応答をシミュレートし定常応答を求めよ。

横軸に  $\log_{10}(\omega)$ 、縦軸に  $20 \cdot \log_{10}(|x|)$  をとれ。

(  $20 \cdot \log_{10}(|x|)$  の単位はデシベル dB である。 )



```
!振掃 02a.bas
option arithmetic complex
set window -4,20,-100,100
```

```

draw grid with scale(10,10)

let m=1
let c=0.05
let k=4
let dt=0.01
let kk=0.4
for n=-4 to 10 step 2
  let w=2^(n/2)
  for t=0 to 500 step dt
    let f=sin(w*t)
    let a=(f-c*v-k*x)/m
    let v=v+a*dt
    let x=x+v*dt
  next n
next t
let h=abs(x)+0.000001
plot lines: -kk+10*log10(w)+0.0008*t,20*log10(h)

```

## 7.8 ボード線図

先の問題での運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = r(t), \quad r(t) = \sin(\omega \cdot t)$$

であらわされる。

ところで、このようなシステムの動特性を調べる手段として次の2つの便利な変換がもちいられる。

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$	ラプラス変換 ( 過渡応答を調べるのに便利 )
$F(i \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$	フーリエ変換 ( 周波数応答を調べるのに便利 )

少々乱暴ないいかたをすれば、 $t = 0$  のとき、

$$x=0 \quad \frac{dx}{dt}=0$$

の場合には、ラプラス変換での  $s$  フーリエ変換での  $i$  は  $\frac{d}{dt}$  のかわりをする

演算子としてもちいることができ、上の微分方程式



$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x + c \cdot \frac{d}{dt} x + k \cdot x = r(t)$$

は

$$m \cdot s^2 \cdot X(s) + c \cdot s \cdot X(s) + k \cdot X(s) = R(s) \quad。$$

この式は代数的に処理することができ、変換後の出力と入力之比は

$$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + c \cdot s + k}$$

となる。  $s$  のかわりに  $i\omega$  をいれたものは、

$$G(i\omega) = \frac{X(i\omega)}{R(i\omega)} = \frac{1}{m \cdot (i\omega)^2 + c \cdot i\omega + k} \quad。$$

これらの関数は、

$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + c \cdot s + k}$	伝達関数
$G(i\omega) = \frac{X(i\omega)}{R(i\omega)} = \frac{1}{m \cdot (i\omega)^2 + c \cdot i\omega + k}$	周波数伝達関数

と呼ばれる。

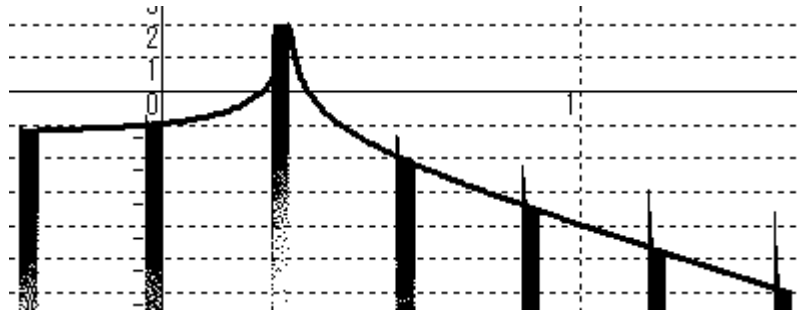
$s$  と  $i\omega$  の世界では、出力は伝達関数に入力を代数的に掛けたものでよい。

先の例題の周波数応答においては、 $\sin(\omega \cdot t)$  の入力に対する定常応答の振幅は、周波数伝達関数の絶対値そのものであらわさる。

複素数の計算後  $\log_{10}(\quad)$  を横軸に、 $20 \cdot \log_{10}(|k \cdot G(i\omega)|)$  を縦軸にとって描かれたグラフをゲインのボード線図という。

## 7 . 9

先の問題で描いた各周波数各速度  $w$  にたいする、棒グラフに、ボード線図を追加せよ。 描かれたボード線図の意味について、自分の言葉で説明せよ。



```
!-----ボード線図を追加-----
set line width 3
set line color 2
let i=complex(0,1)
for n=-40 to 200
  let w=2^(n/40)
  let s=i*w
  let h=abs(1/(m*s^2+c*s+k))
  plot lines:10*log10(w),20*log10(h);
next n
```

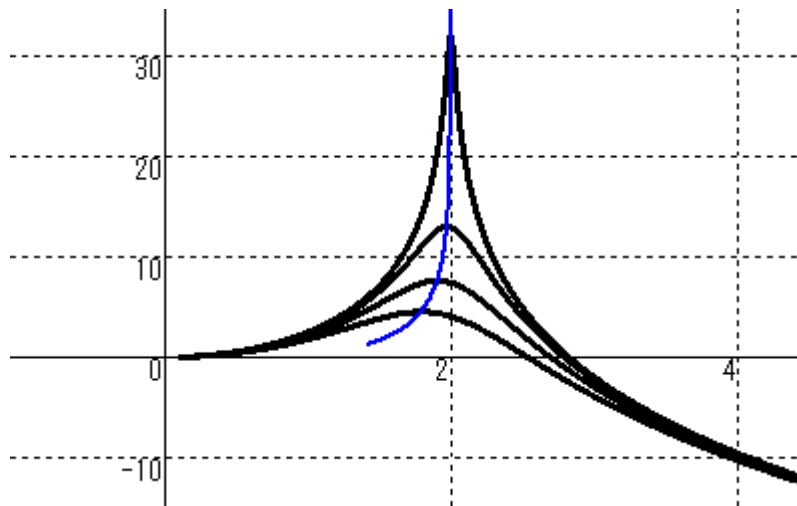
## 7 . 1 0

先の問題で

$$c = 0.05 \text{ , } 0.45 \text{ , } 0.85 \text{ , } 1.25$$

にたいしてボード線図を描け。 (グラフの縮尺を変えて  $c$  の差がよくわかるように)

描かれたボード線図の意味について、自分の言葉で説明せよ。



!振掃 02ac.bas

option arithmetic complex

set axis color 1

set window -2,5,-50,50

draw grid (2,10)

let m=1

let c=0.05

let k=4

let dt=0.01

let kk=0.4

set line width 3

let i=complex(0,1)

for c=0.05 to 1.25 step 0.4

for w=0.1 to 5 step 0.001

let s=i\*w

let G=1/(m\*s^2+c\*s+k)

let x=k\*G

let h=abs(x)+0.000001

plot lines:w,20\*log10(h);

next w

plot lines

next c

set line width 2

set line color 2

for c=0.02 to 2 step 0.01

let w=sqr((k-c^2/2)/m)

let s=i\*w

let G=1/(m\*s^2+c\*s+k)

let x=k\*G

let h=abs(x)+0.000001

plot lines:w,20\*log10(h);

next c

END