第６章　フーリエ級数の原理と複素形フーリエ級数

考えよう　フーリエ級数の原理！

６．１　　m、n を整数とするとき

（１）$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt)\sin(nt)dt=\begin{cases}1...(m=n)\\0...(m\neq n)\end{cases}$

（２）$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)\cos(nt)dt=\begin{cases}1...(m=n)\\0...(m\neq n)\end{cases}$

（３）$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt)\cos(nt)dt=\begin{cases}0...(m=n)\\0...(m\neq n)\end{cases}$

６．２　２πを周期とする関数を**フーリエ級数**

$$f(t)\approx\frac{a_0}{2}+a_1\cos(t)+a_2\cos(2t)+a_3\cos(3t)+\cdots$$
$$+b_1\sin(t)+b_2\sin(2t)+b_3\sin(3t)+\cdots$$

で近似する場合フーリエ係数は**６．１**を適用すると次のように求められる。

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt$$

a_nと b_nの２種類の係数が必要な理由は、周期関数は周波数ωのほかに、振幅Ａと位相φの２個のパラメタが必要だからである。　　次を見よ。

６．３　　$a\cos(\omega\cdot t)+b\sin(\omega\cdot t)$　の振幅と位相はなにか？

$a\cos(\omega\cdot t)+b\sin(\omega\cdot t)=A\sin(\omega\cdot t-\phi)$ とおく。

$b>0$ のとき　$A=\sqrt{a^2+b^2}$　　$\phi=-\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$b<0$ のとき　$A=-\sqrt{a^2+b^2}$　　$\phi=-\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$

６．４　2πを周期する関数のフーリエ級数に

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad、\quad\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\cdot i}$$

を代入すると、

$$f(t)\approx\frac{c_0}{2}+c_1\cdot e^{it}+c_2\cdot e^{i2t}+c_3\cdot e^{i3t}+\cdots$$

$$+c_{-1}\cdot e^{-it}+c_{-2}\cdot e^{-i2t}+c_{-3}\cdot e^{-i3t}+\cdots$$

がえられ、これを**複素形フーリエ級数**という。　その係数は

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot e^{-i\cdot n\cdot t}dt$$

６．５　$2L$を周期とする関数を

$$f(t)\approx\frac{a_0}{2}+a_1\cos(\frac{\pi}{L}t)+a_2\cos(\frac{2\pi}{L}t)+a_3\cos(\frac{3\pi}{L}t)+\cdots$$

$$+b_1\sin(\frac{\pi}{L}t)+b_2\sin(\frac{2\pi}{L}t)+b_3\sin(\frac{3\pi}{L}t)+\cdots$$

で近似する場合フーリエ係数は

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos(\frac{n\pi}{L}t)dt$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin(\frac{n\pi}{L}t)dt$$

６．６　$2L$を周期とする関数を**複素形フーリエ級数**

$$f(t) \approx \frac{c_0}{2} + c_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{L}t} + c_2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{L}t} + c_3 \cdot e^{i\frac{3\pi}{L}t} + \cdots$$

$$+ c_{-1} \cdot e^{-i\frac{\pi}{L}t} + c_{-2} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{L}t} + c_{-3} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{L}t} + \cdots$$

で近似する場合、その**複素形フーリエ係数**は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) \cdot e^{-i\frac{n\pi}{L}t} dt$$