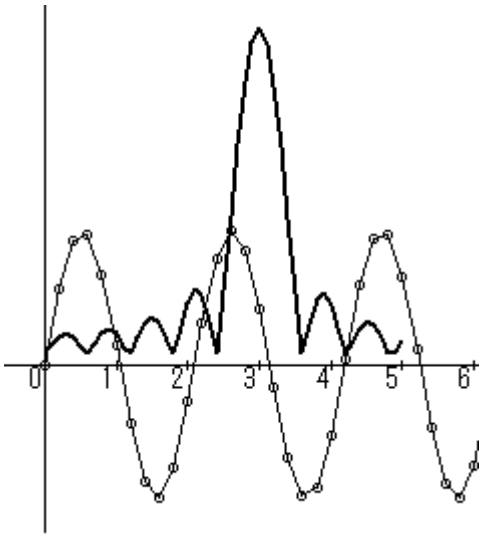
第５章　フーリエ係数

５．３　　（１）周期関数 Periodic function　$f(t) = \sin 3t$ がある。　t = 0→10 にたいして、Δt = 0.2 でサンプリングした 50 個の値 fi を表にせよ。　さらに、数値近似式を使って横軸　ω = 0→5　にたいして Fn を計算し、横軸を ω 、縦軸を Fn としてグラフに表わせ。

（２）　ω - Fn のグラフを周波数スペクトル図 Frequency spectrum という。Frequency spectrum から気のつくことを述べよ。

(Hint)　Excel VBA のかわりに十進 BASIC を使用してプログラムを作ると

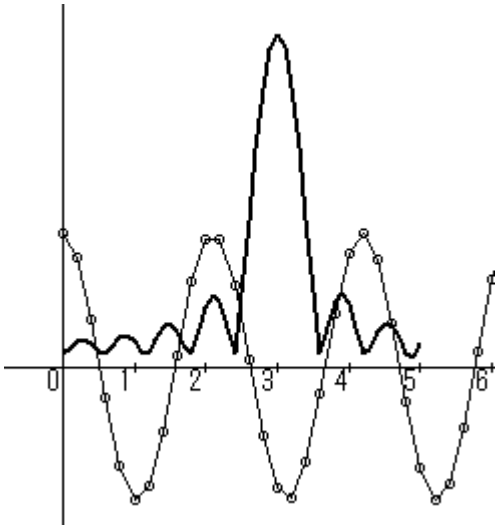
```
!フーリエ係数
!フ級 03b.bas Uede 05-04-23
option base 0
set window -4,10,-5,25
set axis color 1
draw axes(1,100)

dim f(100)

set point style 4
let dt=0.2
for j=0 to 50
  let x=sin(3*t)
  let f(j)=x
  plot points:t,x*4
  plot lines:t,x*4;
  let t=t+dt
next j
plot lines
!-----------------------------------------------------
set line width 2
for w=0 to 5 step 0.1
  let c=0
  let s=0
  for t=0 to 10 step dt
    let j=t*5
    let c=c+f(j)*cos(w*t)*dt
    let s=s+f(j)*sin(w*t)*dt
  next t
  let c=2/t*c
  let s=2/t*s
  plot lines:w,sqr(c^2+s^2)*10 ;
next w
END
```



スペクトル図では周期関数の周波数ω=3 で縦軸の値が最大となる。

５．４　（１）Frequency function　$f(t)=\cos 3t$ がある。　t = 0→10　にたいして、Δt = 0.2 でサンプリングした 50 個の値 fi を表にせよ。　さらに、数値近似式を使って横軸　ω= 0→5　にたいして Fn を計算し、横軸を ω 、縦軸を Fn としてグラフに表わせ。

（２）Frequency spectrum から気のつくことを述べよ。

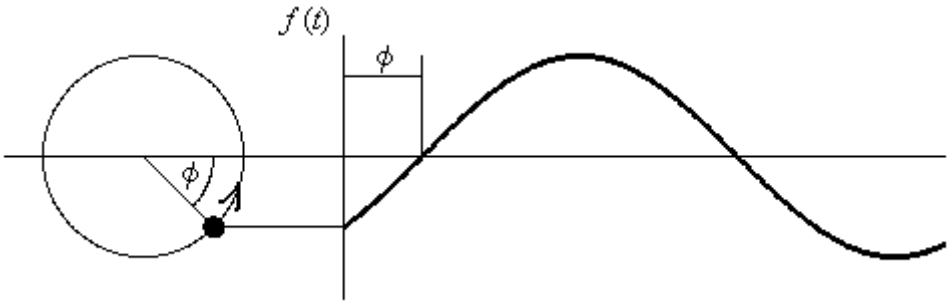



```
!フーリエ係数
!フ級 03c.bas Uede 05-04-29
option base 0
set window -4,10,-5,25
set axis color 1
draw axes(1,100)

dim f(100)

set point style 4
let dt=0.2
for j=0 to 50
  let x=cos(3*t)
  let f(j)=x
  plot points:t,x*4
  plot lines:t,x*4;
  let t=t+dt
next j
plot lines
!--------------------------------
set line width 2
for w=0 to 5 step 0.1
  let c=0
  let s=0

  for t=0 to 10 step dt
    let j=t*5
    let c=c+f(j)*cos(w*t)*dt
    let s=s+f(j)*sin(w*t)*dt
  next t

  let c=2/t*c
  let s=2/t*s
  plot lines:w,sqr(c^2+s^2)*10 ;

next w

END
```

前門題と比較して、周期関数の位相がずれているにも関わらず、スペクトル図では周期関数の周波数ω=3 で縦軸の値が最大となる。

５．５　サインカーブの一般式は

$$f(t) = A\sin(\omega \cdot t - \phi) = a\cos(\omega \cdot t) + b\sin(\omega \cdot t) \quad 。$$



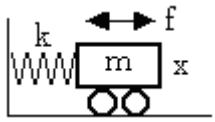
A は**振幅** Amplitude、φは**位相遅れ角** Phase である。A とφを ***a , b*** であらわせ。

（ヒント）正弦関数の一般式は周波数角速度ωのほかに、振幅Aと位相遅れ角φの２個のパラメタが必要である。

$$b > 0 \text{ のとき} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$b < 0 \text{ のとき} \quad A = -\sqrt{a^2 + b^2} \qquad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

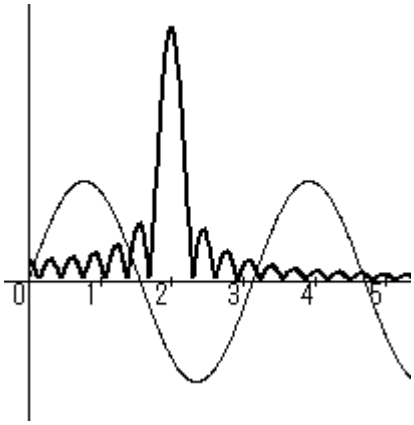
５．６



質量バネシステム Mass-spring system がある。　Mass を　m = 1 [kg]　とする。　Spring constant k = 1 [N/m]、 k = 4 [N/m]、 k = 9 [N/m] の３種類にたいして、 dt = 0.001 として、f = 1/dt のインパルスを与えた場合の 20000 ステップの Simulation を行い、Frequency spectrum を作成して見よう。

(Hint)

```
!フーリエ係数
!フ級 04.bas Uede 03-12-3
option base 0
option arithmetic complex
set window -4,10,-5,15
set axis color 1
draw axes(1,10)

dim f(2000)
let i=complex(0,1)
let m=1
let k=4
let dt=0.01
for j=0 to 2000
  if t=0 then
    let f1=1/dt
  else
    let f1=0
  end if
  let a=(f1-k*x)/m
  let v=v+a*dt
  let x=x+v*dt
  let f(j)=x
  plot lines:t,x*4
  let t=t+dt
next j
!--------------------------------
set line width 2
for w=0 to 7 step 0.01
  let c=0
  let s=0
  for j=0 to 2000
    let t=0.01*j
    let c=c+f(j)*cos(w*t)*dt
    let s=s+f(j)*sin(w*t)*dt
  next j
  let c=2/t*c
  let s=2/t*s
  plot lines:w,sqr(c^2+s^2)*10 ;
next w
END
```



５．８　$f(t) = 0.9\sin(t) + 0.3\cos(2t) + 0.4\sin(3t)$ のとき

（１）$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)dt = 0.9$　　（２）$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(2t)dt = 0.3$

（３）$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(3t)dt = 0.4$　　（４）$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(2t)dt = 0.3$

５．９　　$f(t) = 0.9\sin(t) + 0.3\cos(2t) + 0.4\sin(3t)$ のとき.

（１）$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\cdot t}dt = -0.9i$　　（２）$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\cdot 2\cdot t}dt = 0.3$

（３）$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\cdot 3\cdot t}dt = -0.4i$　　（４）$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\cdot 4\cdot t}dt = 0$

５．１０　　２つの関数 Functions が下の関係 Relation にあるとき、これらは -πとπの間で**直交する O**rthogonal という。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = 0$$ 。

次の２つの関数は**直交する** Orthogonal か？

（１）$f(t) = 1$、$g(t) = t$ 直交する　（２）$f(t) = \sin(t)$、$g(t) = \sin(2t)$ 直交する

（３）$f(t) = \sin(t)$、$g(t) = \cos(t)$　直交する

（４）$f(t) = e^{it}$、$g(t) = e^{i(2t)}$　直交する