第４章　線積分

４．３

（１）　$\dfrac{e^z}{z} \to \dfrac{e^0}{z-0}$ ゆえに、$\displaystyle\oint \frac{e^z}{z} dz = 2\pi e^0 \cdot i = 2\pi i$

（２）　$\dfrac{e^z}{z+1} \to \dfrac{e^{-1}}{z-(-1)}$ ゆえに、$\displaystyle\oint \frac{e^z}{z+1} dz = 2\pi e^{-1} \cdot i = \frac{2\pi}{e} i$

（３）　$\dfrac{e^z}{z-a} \to \dfrac{e^a}{z-a}$ ゆえに、$\displaystyle\oint \frac{e^z}{z-a} dz = 2\pi \cdot i \cdot e^a$

４．４

$$\oint \frac{e^z}{z(z+1)} dz = \oint \frac{e^z}{z} dz - \oint \frac{e^z}{z+1} dz = 2\pi i(1-\frac{1}{e})$$

４．５

（１）　$\dfrac{1}{(s-1)(s-4)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{s-4} - \dfrac{1}{s-1}\right)$

（２）　$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} = \dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{s-a} - \dfrac{1}{s-b}\right)$

４．６

（１）　$\displaystyle\lim_{z \to 2+i\cdot\infty} \frac{e^z}{z} = 0$

（２）　$\displaystyle\lim_{z \to 1+i\cdot\infty} \frac{e^z}{z+1} = 0$

４．７　a=0　のとき

$$\int_{a-i\cdot\infty}^{a+i\cdot\infty}\frac{e^z dz}{z+1}=\frac{2\pi i}{e}$$

４．８　a=0　のとき

（１）　$G(s)=\dfrac{1}{2s+1}$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\cdot\infty}^{a+i\cdot\infty}G(s)\cdot e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{st}}{2s+1}ds=\frac{2\pi i}{4\pi i}e^{-\frac{t}{2}}=\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}$$

（２）　$G(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+2}$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\cdot\infty}^{+i\cdot\infty}\frac{e^{st}}{s+1}ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{st}}{s+2}ds=e^{-t}-e^{-2t}$$

（３）　$G(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4i}\int_{-i\cdot\infty}^{+i\cdot\infty}\frac{e^{st}}{s-2i}ds-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{st}}{s+2i}ds=\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{4i}=\frac{\sin(2t)}{2}$$

（４）　$G(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{st}}{s^2+s+1}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{st}}{(s-\alpha)(s-\beta)}ds=\frac{2\pi i}{2\pi i\cdot(\alpha-\beta)}(e^{\alpha\cdot t}-e^{\beta\cdot t})$$

$s^2+s+1=0$ の根は $\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ と $\beta=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　。

g(t) のαとβに代入して、 $g(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$.

４．９　$\sigma=1$のとき

$$\int_{\sigma-i\cdot\infty}^{\sigma+i\cdot\infty}\frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)}ds=\frac{1}{ab}\left(1-\frac{be^{-at}}{b-a}+\frac{ae^{-bt}}{b-a}\right)$$

（１）　$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$　では

$$g(t)=\int_{\sigma-i\cdot\infty}^{\sigma+i\cdot\infty}\frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)}ds=\frac{1}{ab}\left(1-\frac{be^{-at}}{b-a}+\frac{ae^{-bt}}{b-a}\right)=\frac{1}{2}\left(1-2e^{-t}+e^{-2t}\right)$$

（２）　$G(s)=\frac{1}{s(s^2+s+1)}$　では　$a=\alpha+i\beta$　、　$b=\alpha-i\beta$　とおくと $s^2+s+1=0$　の根　$-a=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 、 $-b=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　から $\alpha=\frac{1}{2}$ 、 $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ だから、

$$g(t)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{-\alpha\cdot t}\cos(\beta\cdot t)-\frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha\cdot t}\sin(\beta\cdot t)\right)$$
$$=1-e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

４．１０　x 軸に平行な速度 U の一様流れの中におかれた循環Γをもつ半径 a のまわりの流れをあらわす Complex potential は

$$w=U\cdot\left(z+\frac{a^2}{z}\right)+i\cdot\frac{\Gamma}{2\cdot\pi}\cdot\log\left(\frac{z}{a}\right)$$

である。 そして、u , v をそれぞれｘ方向、ｙ方向の速度成分 Velocity components とすると き、

$$u - i\cdot v = \frac{dw}{dz} = U\cdot\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + i\cdot\frac{\Gamma}{2\cdot\pi\cdot z}$$

によって、u , v を求めることができる。

Cylinder まわりの流れによって、Cylinder に作用する x 方向と y 方向の力の成分をそれぞれ Fx , Fy とすると、Blasius の第一公式によれば、

$$F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2}\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$$

である。　Cylinder に作用する　*Fx*、 *Fy* をもとめてみよう。　　lift02.bas

$$F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2}\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = i\frac{\rho}{2}\oint\left(U + \frac{i\Gamma}{2\pi z} - \frac{Ua^2}{z^2}\right)^2 dz = i\frac{\rho}{2}\frac{2i\Gamma U}{2\pi}\oint\frac{dz}{z}$$
$$= i\frac{\rho}{2}\frac{2iU\Gamma}{2\pi}(2\pi i) = -i(\rho U\Gamma)$$

ゆえに $F_x = 0$、 $F_y = \rho U\Gamma$　（揚力）

４．１１　A cylinder 20 cm in diameter spins at 250 rpm in a 15 m/s wind. What is the lift per unit length of the cylinder？

回転円柱長さ 1 m あたりの揚力は

$$F_y = \rho U\Gamma = 1.2\cdot 15\cdot(0.2\pi)\left(0.2\pi\frac{250}{60}\right) = 29.609 \quad \text{N/m}$$