

十進 BASIC の複素数計算機能を使う

上出拓郎

新居浜工業高等専門学校 非常勤講師

(仮称)十進 BASIC は、文教大学の白石和夫氏が開発した JIS Full BASIC 規格に準拠した BASIC で、数値計算とグラフィックスが扱いやすく設計されたフリーウェアです。

グラフを描くのが簡単。 グラフはコピー貼り付けができる。

複素数が扱える。 行列が扱える。

図形の変形や回転・移動のための関数がある。

などの色々な特徴があります。

この中で、複素数計算機能を使って、いくつかの数学の「実験」を紹介しましょう。

なお、(仮称)十進 BASIC の詳細とダウンロードは以下から可能です。

<http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/basicw32.htm>

1 . オイラーの公式 を試す

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta \quad (-2\pi \leq \theta \leq 2\pi)$$

カッコ内の範囲で、 $\frac{\pi}{18}$ のステップでとった各点にたいして、左辺の、実部と虚部をプロットします。 そして右辺の実部 $\cos \theta$ と虚部 $\sin \theta$ のグラフと比較して、オイラーの公式が成り立っていることを実感します。

```
option arithmetic complex
set window -4*pi,4*pi,-4,4
draw axes (pi,1)
```

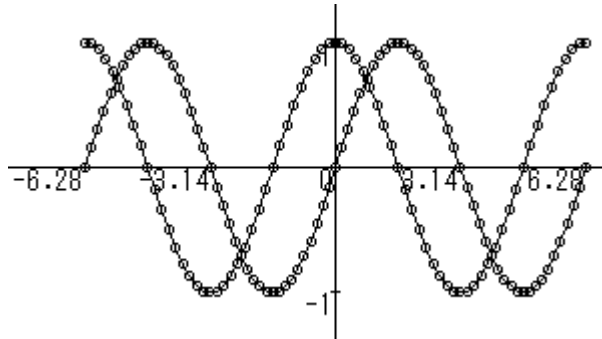
```
let i=complex(0,1)
```

```
for theta=-2*pi to 2*pi step pi/18
  let z=exp(i*theta)
  plot lines:theta,Re(z);
  set point style 4
  plot points:theta,cos(theta)
next theta
```

```
plot lines
```

```
for theta=-2*pi to 2*pi step pi/20
  let z=exp(i*theta)
  plot lines:theta,Im(z);
  plot points:theta,sin(theta)
next theta
```

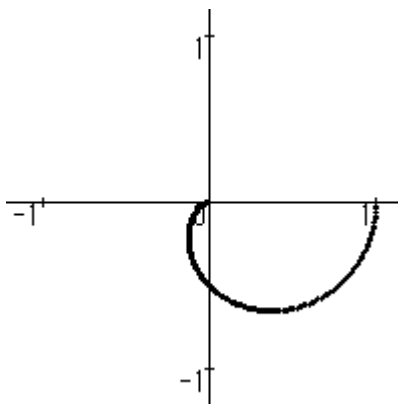
```
END
```



2 . ベクトル軌跡を描かせる

$$j = \sqrt{-1} \text{ として、 } G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1}$$

のような関数 $G(j\omega)$ を 2 次遅れシステムの周波数伝達関数といいます。 ω を変化させて、この関数を複素平面にプロットしたものがベクトル軌跡で、この関数の絶対値はゲイン、偏角は位相遅れとなります。



```
option arithmetic complex
set window -3,3,-3,3
draw axes
```

```
let j=complex(0,1)
def G(s)=1/(s^2+2*s+1)
```

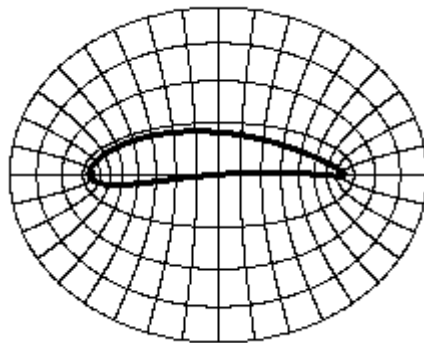
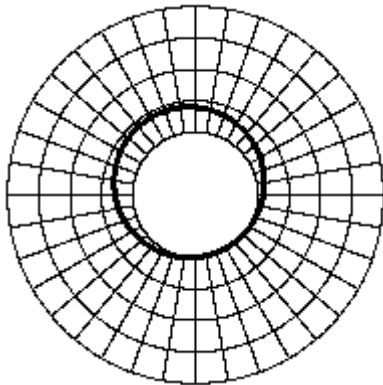
```
set line width 3
for w=0 to 1000 step 0.01
  let s=j*w
  let H=G(s)
  plot lines:Re(H),Im(H)
next w
END
```

3 . 円を写像する

z 平面で半径 1.2、中心が $c = -0.2 + 0.2 \cdot i$ にある円を複素関数

$$w = z + 1/z$$

によって w 平面へ写像して見ましょう。



```
option arithmetic complex
set window -8,8,-8,8

let i=complex(0,1)
for r=1 to 3 step 0.5
  for theta=-2*pi to 2*pi step pi/360
    let z=r*exp(i*theta)
    let w=z+1/z
    plot lines:Re(z)-4,Im(z)
    plot lines:Re(w)+4,Im(w)
  next theta
next r
for theta=-2*pi to 2*pi step pi/18
  for r=1 to 3 step 0.01
    let z=r*exp(i*theta)
    let w=z+1/z
    plot lines:Re(z)-4,Im(z)
    plot lines:Re(w)+4,Im(w)
  next r
next theta
```

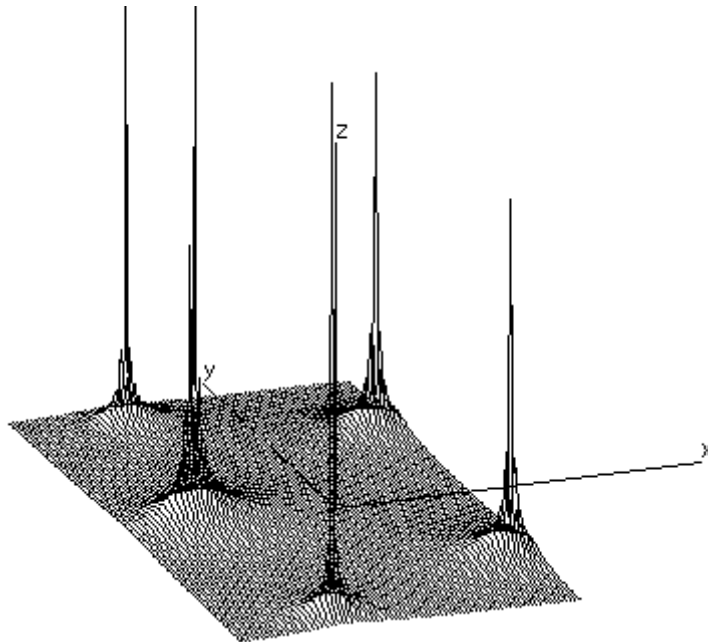
```
let c=-0.1+0.2*i
set line width 3
for theta=-2*pi to 2*pi step pi/360
  let z=1.2*exp(i*theta)+c
  let w=z+1/z
  plot lines:Re(z)-4,Im(z)
  plot lines:Re(w)+4,Im(w)
next theta
```

END

4 . 多項式からなる方程式の根の近似値を求める

$$3s^5 + 2s^4 + 6s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0$$

複素平面をスキャンして、関数の逆数の絶対値をグラフにしてみると次の図のようになります。



5次元の多項式の方程式には5個の根があるが、グラフで、この突き出しているところが根となります。したがって、次のように複素平面上に根の位置の見当をつけることができます。

```
option arithmetic complex
set window -4,4,-4,4
draw grid (0.5,0.5)

let i=complex(0,1)
def f(s)=1/(3*s^5+2*s^4+6*s^3+s^2+4*s+4)

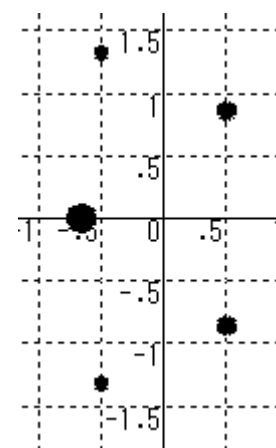
for x=-4 to 4 step 0.02
  for y=-4 to 4 step 0.02

    let s=x+i*y
    let z=f(s)

    if abs(z)>1 then
      plot points:x,y
    end if

  next y
next x

END
```



5 . 吹出しと吸い込みの流れを見る

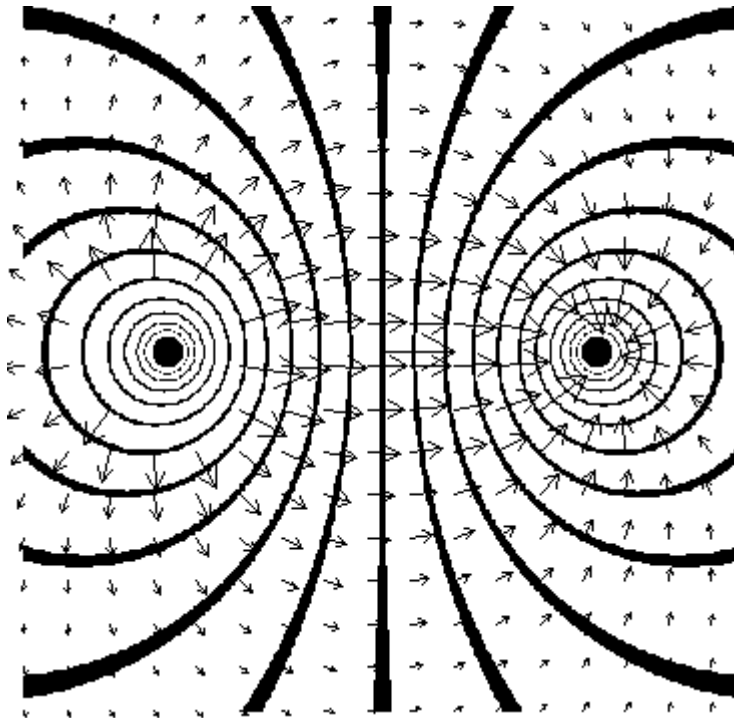
複素関数 $w = \log(z + a) - \log(z - a) = \phi + i \cdot \psi$

は流体力学ではある等量の大きさの吹出しと吸い込みが $2a$ の間隔でおかれた状態をあらわす複素ポテンシャルとよばれます。電気磁気学では正と負の電荷の静電場をあらわします。複素関数 w の実部 $\text{Re}(w) = \phi$ はポテンシャル関数といい、虚部 $\text{Im}(w) = \psi$ は流れ関数と呼ばれます。流体の速度は、

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad .$$

でもとめられます。

上の複素関数であらわされる、非粘性非圧縮性流体の速度のベクトル場と等ポテンシャル線を描かせて見ましょう。



```
option arithmetic complex
set window -10,10,-10,10
```

```
let i=complex(0,1)
let b=0.5
let h=0.001
def f(z)=log(z+3)-log(z-3)
```

```
for x=-5 to 5 step 0.6
  for y=-5 to 5 step 0.6
    let z=x+i*y
    let w=f(z)
    let z=x+h+i*y
    let wx=f(z)
    let vy=-((Im(wx)-Im(w))/h)
    let z=x+i*(y+h)
    let wy=f(z)
    let vx=(Im(wy)-Im(w))/h
    let th=angle(vx,vy)
    let L=sqr(vx^2+vy^2)
    if (x+3)^2+y^2>1 and (x-3)^2+y^2>1 then
      draw arrow with rotate(th)*scale(0.7*L)*shift(x,y)
    end if
  next y
next x
```

```
draw disk with scale(0.2)*shift(3,0)
draw disk with scale(0.2)*shift(-3,0)
```

```
END
```

```
!-----
external picture arrow
option arithmetic complex
let aa=30*pi/180
plot 0,0;1,0
plot 1,0;1-0.3*cos(aa),0.3*sin(aa)
plot 1,0;1-0.3*cos(aa),-0.3*sin(aa)
end picture
```

```
***
```

6 . 回転する円柱まわりの流れ

複素関数

$$w = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \left(\frac{z}{a} \right) = \phi + i \cdot \psi$$

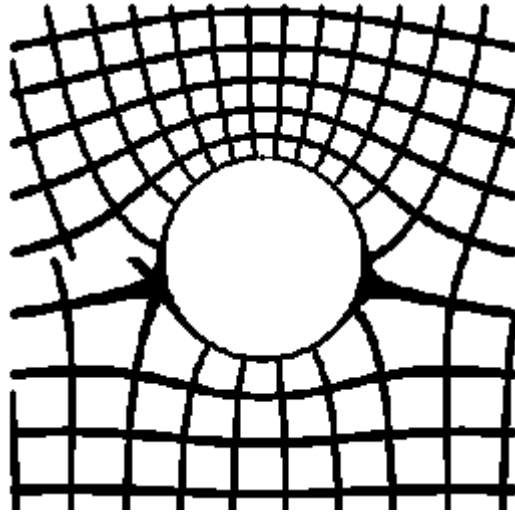
は一樣流れのなかにおかれた回転する円柱まわりの流れをあらわします。

$\psi = \text{Im}(w) = \text{const.}$ で流線をあらわし、 $\phi = \text{Re}(w) = \text{const.}$ で 等ポテンシャル線を描くことができます。

```
option arithmetic complex
set window -10,10,-10,10
```

```
let i=complex(0,1)
let a=2
let U=1
let G=1*pi*a
set line width 3
for x=-5 to 5 step 0.03
  for y=-5 to 5 step 0.03
    let z=x+i*y
    let w=U*(z+a^2/z)+i*G/2/pi*log(z/a)
    let psi=Im(w)
    let pfi=Re(w)

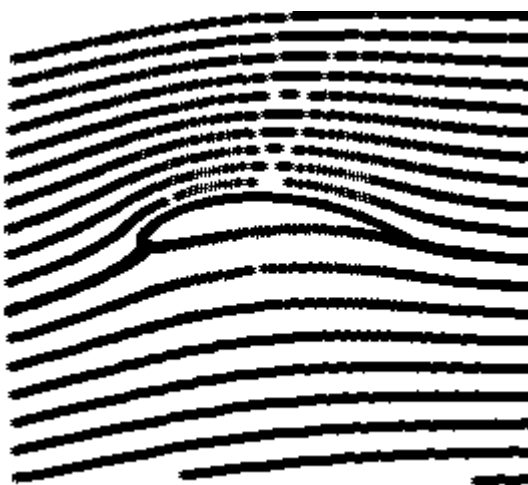
    if x^2+y^2>a^2 then
      for k=-10 to 10 step 1
        if psi>k-0.05 and psi<k+0.05 then
          plot lines : x,y
        end if
        if pfi>k-0.03 and pfi<k+0.03 then
          plot lines :x,y
        end if
      next k
    end if
  next y
next x
END
```



7 . 翼のまわりの流れ

前の回転する円柱まわりの流れを少し傾け、関数 $\zeta = z + \frac{b^2}{z}$

で $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ に写像して、翼のまわりの流線を描かせて見ましょう。



```
option arithmetic complex
set window -10,10,-10,10

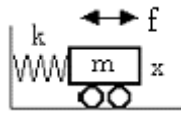
let i=complex(0,1)
let a=1.5
let b=1.3
let alpha=-6/180*pi
let U=2
let G=2.5*pi*a
let c=-0.1+0.3*i
for x=-5 to 5 step 0.03
  for y=-5 to 5 step 0.03
    let z=x+i*y
    let zz=(z-c)*exp(i*alpha)
    let w=U*(zz+a^2/zz)+i*G/2/pi*log(zz/a)
    let ez=z+b^2/z
    let ex=Re(ez)
    let ey=Im(ez)
```

```

let psi=Im(w)
if abs(z-c)>a then
  for k=0 to 10 step 1
    if abs(psi)>k and abs(psi)<k+0.06 then
      plot points : ex,ey
    end if
  next k
end if
next y
next x
END

```

8 . 質量 - スプリング系の周波数スペクトルを描かせる



図のような質量 - スプリング系の質量にインパルスを与えてシミュレートして見ましょう。 さらにえられたアウトプット x の離散値の複素フーリエ係数を数値計算して、その絶対値をもちいて、周波数スペクトルを描かせましょう。

```

option base 0
option arithmetic complex
set window -1,20,-1,3
draw grid with scale (1,1)

```

```
dim f(2000)
```

```

let i=complex(0,1)
let m=1
let k=16
let dt=0.01
for j=0 to 2000
  if t=0 then
    let f1=1/dt
  else
    let f1=0
  end if
  let a=(f1-k*x)/m
  let v=v+a*dt
  let x=x+v*dt
  let f(j)=x
  plot lines:t,x
  let t=t+dt
next j

```

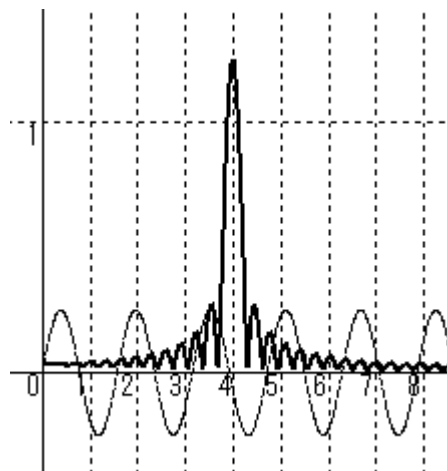
```
next j
```

```
!-----
```

```
set line width 2
```

```
let dy=0.01
```

```
for n=0 to 20 step 0.01
```



```

let c=0
let s=0
for y=0 to 2000
  let t=0.01*y
  let c=c+f(y)*exp(-i*n*t)*dt
next y
let c=1/20*abs(c)
plot lines:n,c*10 ;

next n
END

```

9 . デイラックのデルタ関数をイメージする

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

上であらわされるデイラックのデルタ関数をおおまかにイメージしましょう。

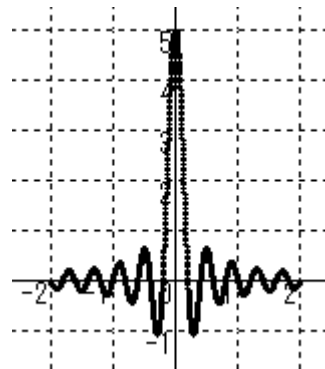
```

option arithmetic complex
set window -8,8,-1,12
set axis color 1
draw grid (1,1)

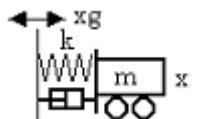
let i=complex(0,1)
let dw=0.002
set line width 3
for t=-2 to 2 step 0.002
  for w=-5*pi to 5*pi step dw
    let c=c+1/2/pi*exp(i*w*t)*dw
  next w
  plot lines:t,Re(c)
  let c=0
next t

END

```



10 . 質量 - ダンパー - スプリング系のゲインのボード線図を描く



図の質量 - ダンパー - スプリング系のスプリングの固定点に正弦運動を与えます。 入力周波数にたいしてこの時の質量の変位 x をアウトプットとして、その絶対値の対数をプロットしたものが、ゲインのボード線図となります。

まず、質量の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = kx_g + c \frac{dx_g}{dt} .$$

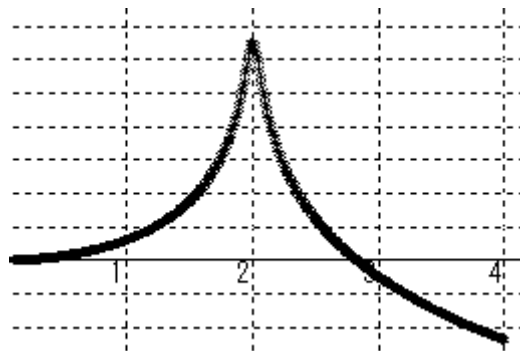
方程式の中の $\frac{d}{dt}$ を微分演算子 s で、 $\frac{d^2}{dt^2}$ を s^2 で置き換えます。

$$(ms^2 + cs + k)X = (k + cs)X_g$$

アウトプットとインプットの比率から伝達関数がもとめられます。

$$G(s) = \frac{X}{X_g} = \frac{k + cs}{ms^2 + cs + k}$$

s に $j\omega$ を代入して横軸に ω を、縦軸に x の絶対値の対数をとると、ゲインのボード線図がえられ、系の固有振動数が一目瞭然にわかります。



```
option arithmetic complex
set window 0,8,-2,4
draw grid with scale(1,0.2)
let m=1
let c=0.1
let k=4
let n=log(10)
let j=complex(0,1)
for w=0.1 to 4 step 0.01
```

```
let s=j*w
let G=(k+c*s)/(m*s^2+c*s+k)
let hh=log(abs(G))/n
plot points:w,hh
next w
END
```