

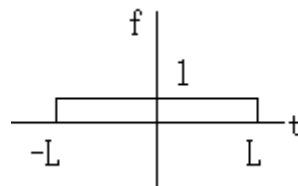
十進 BASIC でフーリエ変換をイメージする

フーリエペア

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

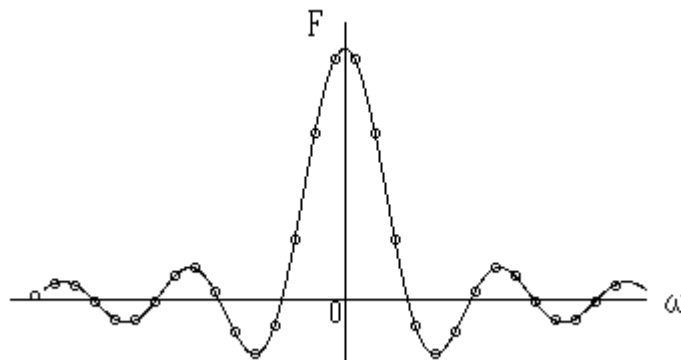
1 . 四角形関数のフーリエ変換のイメージ



のフーリエ変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-L}^L e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega L}{\omega}$$

となり (虚部は0で実部のみ) $L=5$ の場合は



となる。ここで上のグラフでカーブは数値計算によるもので、印は上の理論計算式によるものである。数値計算と理論計算式はあまりちがわない。

サンプルプログラム

```
!フーリエ変換
!フ変 05b.bas Uede 05-5-6

option arithmetic complex
option base 0
set window -7,3,-20,20
set axis color 1
draw axes(10,100)

let i=complex(0,1)

let dy=0.01
let dw=0.01
let L=5
let m=-6
plot lines:m,0;m,1;m+2,1;m+2,0
plot lines:m+1,-20;m+1,20
for w=-3 to 3 step dw
  let c=0
  for y=-20 to 20 step dy
    let c=c+f(y)*exp(-i*w*y)*dy
  next y
  set line color 1
  plot lines: w,Re(c);
next w

set point style 4
for w=-3.1 to 2.9 step 0.2
  let y=2*sin(w*L)/w
  plot points:w,y
next w

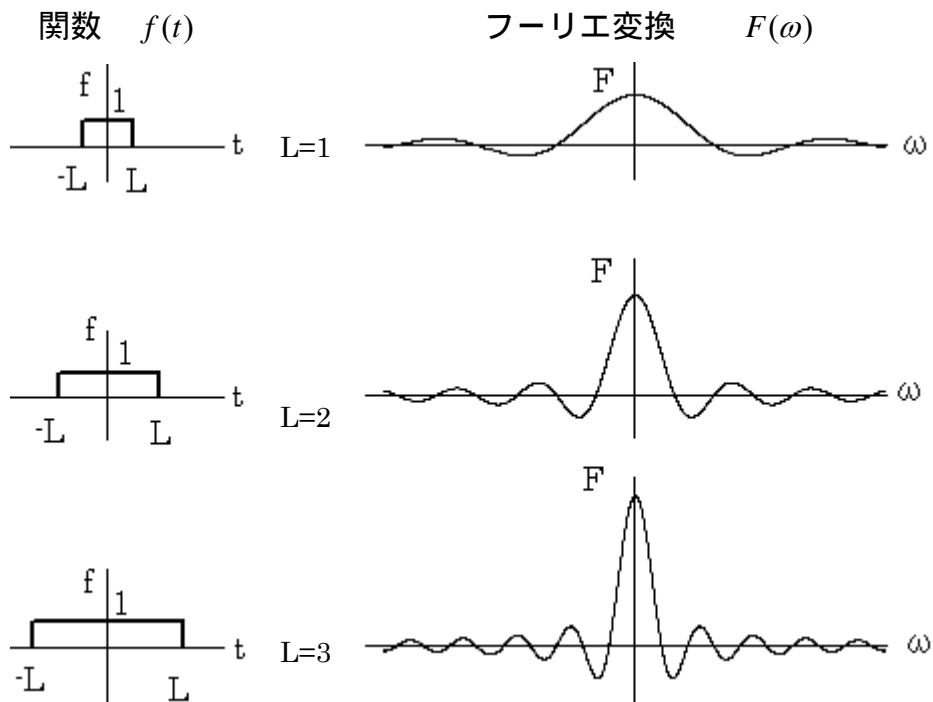
function f(x)
  let L=5
  if abs(x)<=L then
    let f=1
  else
    let f=0
  end if
end function

END
```

では次に L を変えて、フーリエ変換のグラフを見て見よう。

L の値が大きくなれば、グラフの中央は高くなり、波の周波数が大きくなることも見る事ができるだろう。

L を無限大にすると、ディラックのデルタ関数のフーリエ変換 (t) をえることができる。



サンプルプログラム

```

!フーリエ変換
!フ変 07c.bas Uede 05-5-7

option arithmetic complex
option base 0
set window -15,25,-20,20

let i=complex(0,1)

let dw=0.01
plot lines:10,-20;10,20
plot lines:-10,-20;-10,20

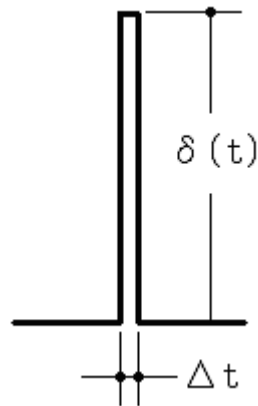
for L=1 to 3
  set line width 2
  plot lines:-L-10,20-10*L;-L-10,21-10*L;L-10,21-10*L;L-10,20-10*L
  set line width 1
  for w=-10 to 10 step dw
    let f=2*sin(w*L)/w
    plot lines: w+10,f+20-10*L;
  next w
  plot lines
  plot lines: -20,20-10*L;20,20-10*L
next L

END

```

2. インパルス (デイラック関数) のイメージ

まずはおおまかに



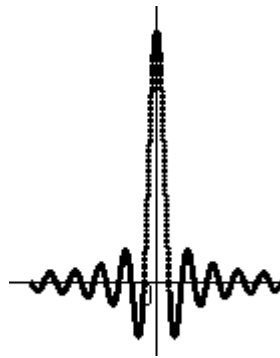
$$\delta(t) \cdot \Delta t = 1$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

をかんがえる。

$$\delta(t)_{t=0} = \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

実際のデイラックのデルタ関数の近似積分をつかったのイメージは



のようなもの。

デイラック関数 (インパルス) のフーリエ変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = 1$$

逆变換すると

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \cdot t} d\omega$$

t と ω を入れ替えると

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \cdot t} dt$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \cdot t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

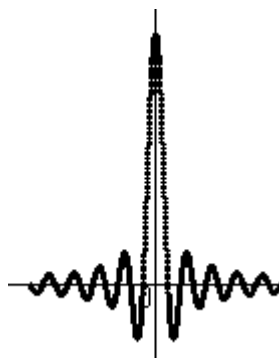
対称性から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \cdot t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

これをしっかり覚える。

デルタ関数 $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \cdot t} d\omega$ のグラフは

次のサンプルプログラムで描画できる。



----サンプルプログラム----

!ディラック関数

!フ変 01a.bas Uede 04-10-26

```
option arithmetic complex
set window -8,8,-1,12
set axis color 1
draw grid (1,1)
```

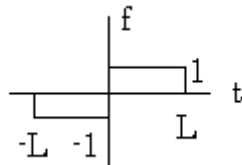
```
let i=complex(0,1)
let dw=0.002
set line width 3
for t=-2 to 2 step 0.002
  for w=-5*pi to 5*pi step dw
    let c=c+1/2/pi*exp(i*w*t)*dw
  next w
```

```
plot lines:t,Re(c)
let c=0
```

```
next t
```

```
END
```

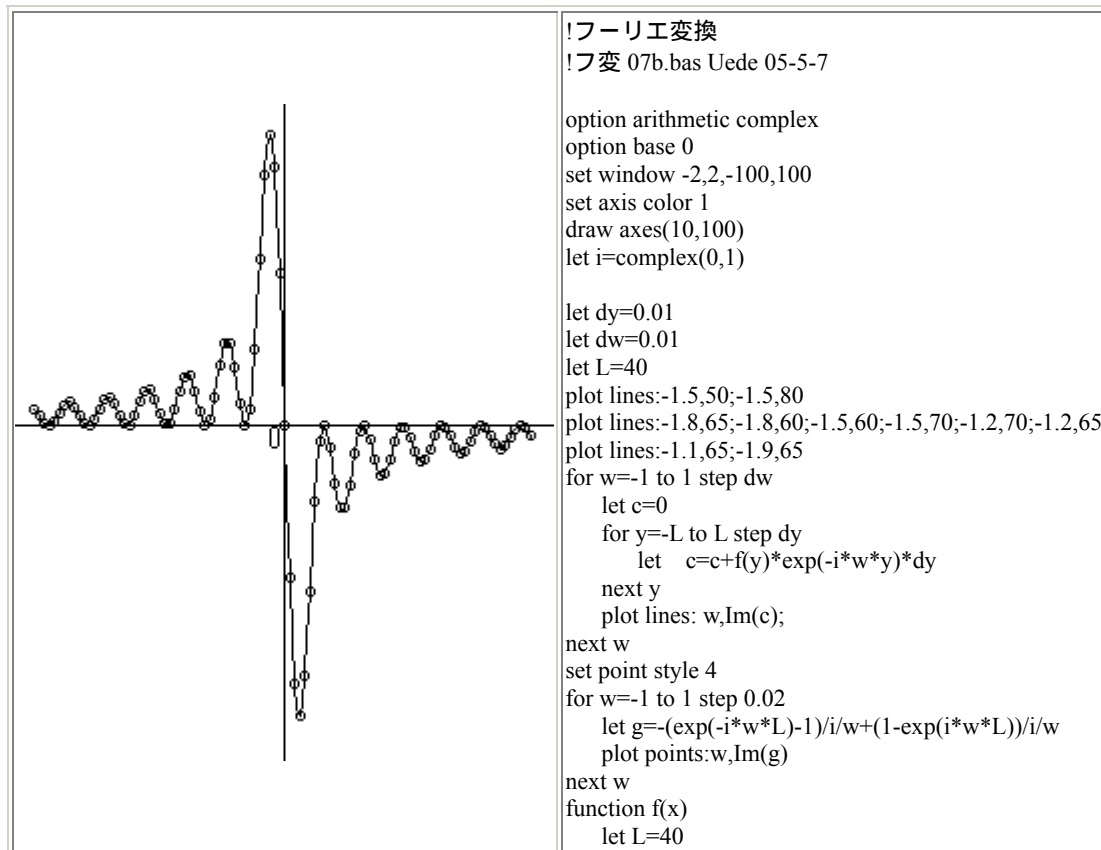
3 . 四角形関数 (奇関数) のフーリエ変換のイメージ



のフーリエ変換は理論計算上は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_0^L e^{-i\omega t} dt - \int_{-L}^0 e^{-i\omega t} dt = \frac{[e^{-i\omega t}]_0^L}{-i\omega} - \frac{[e^{-i\omega t}]_{-L}^0}{-i\omega}$$

となる。 L=40 の場合の数値積分によるグラフに理論値をプロットして比較して見る。 (実部は 0 で虚部のみとなる。)



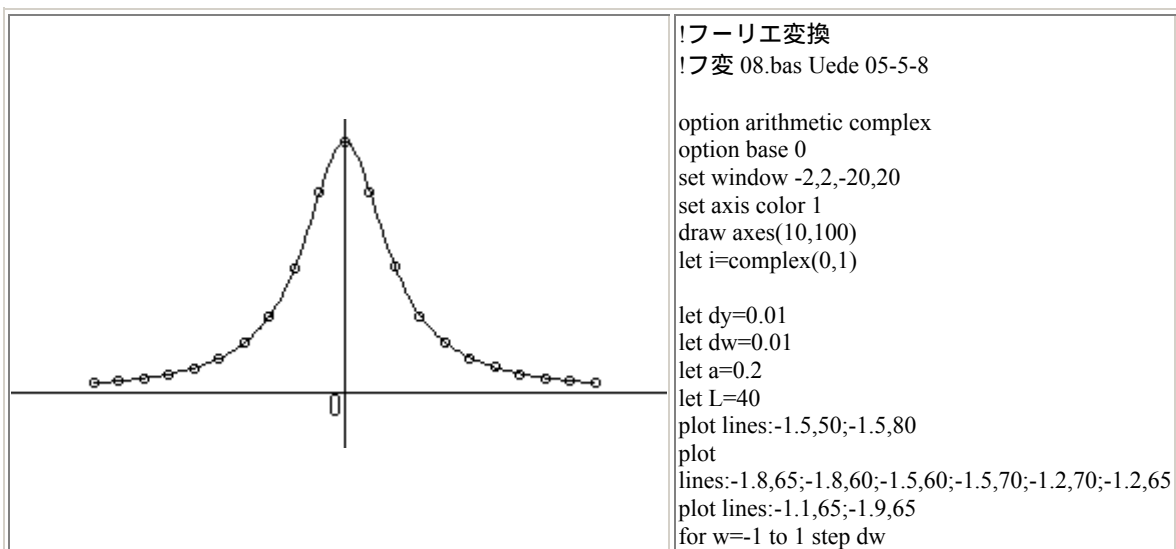
	<pre> if abs(x)>L then let f=0 end if if x>0 and x<=L then let f=1 end if if x<0 and x>=-L then let f=-1 end if end function END </pre>
--	--

4 . $f(t) = e^{-a|t|}$ のフーリエ変換

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\
&= \left[\frac{1}{a-i\omega} e^{(a-i\omega)t} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{1}{-a-i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \\
&= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

ところで、 $a \rightarrow +0$ で上の式は $\frac{2a}{a^2 + \omega^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$

$a=0.2$ の場合の数値積分によるグラフに理論値をプロットして比較して見る。
(虚部は0で実部のみとなる。)



```

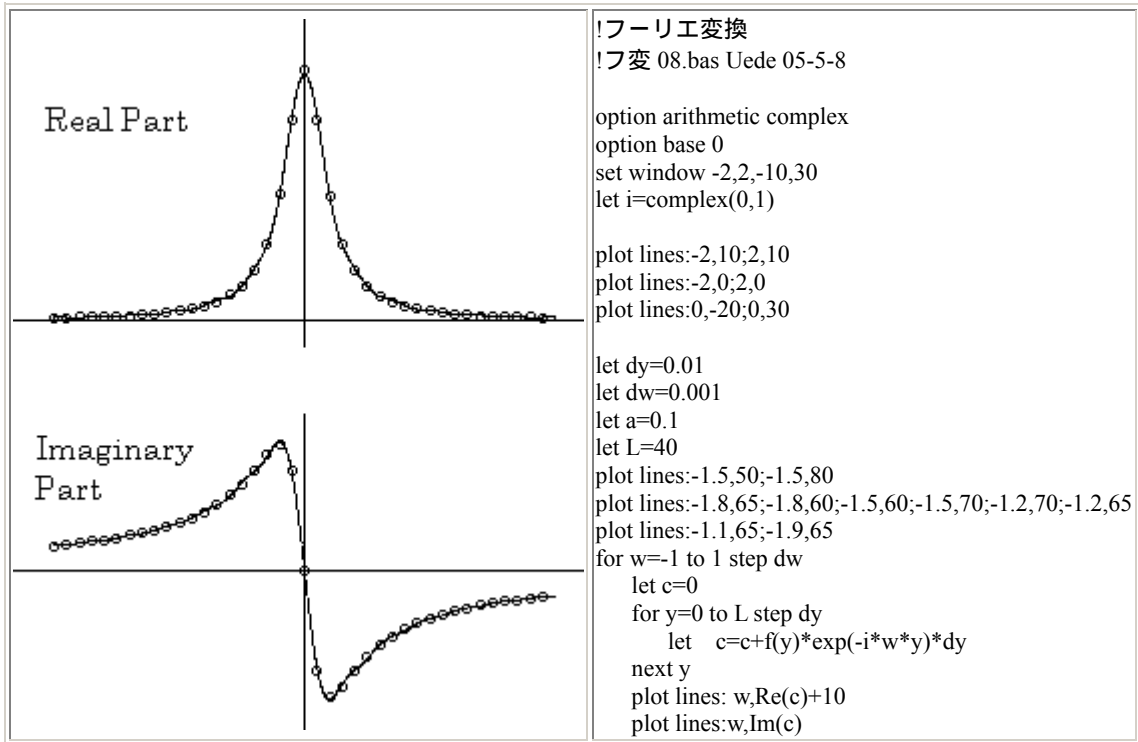
let c=0
for y=-L to L step dy
  let c=c+f(y)*exp(-i*w*y)*dy
next y
plot lines: w,Re(c);
next w
set area color 3
set point style 4
for w=-1 to 1 step 0.1
  let g=2*a/(a^2+w^2)
  plot points:w,Re(g)
next w
function f(x)
  let a=0.2
  let f=exp(-a*abs(x))
end function
END

```

5 . $f(t) = \begin{cases} e^{-at} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$ ただし ($a > 0$) のフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = \frac{1}{i\omega + a}$$

$a=0.1$ の場合の数値積分によるグラフに理論値をプロットして比較して見る。
 (実部も虚部もあらわれる。)



```

!フーリエ変換
!フ変 08.bas Uede 05-5-8

option arithmetic complex
option base 0
set window -2,2,-10,30
let i=complex(0,1)

plot lines:-2,10;2,10
plot lines:-2,0;2,0
plot lines:0,-20;0,30

let dy=0.01
let dw=0.001
let a=0.1
let L=40
plot lines:-1.5,50;-1.5,80
plot lines:-1.8,65;-1.8,60;-1.5,60;-1.5,70;-1.2,70;-1.2,65
plot lines:-1.1,65;-1.9,65
for w=-1 to 1 step dw
  let c=0
  for y=0 to L step dy
    let c=c+f(y)*exp(-i*w*y)*dy
  next y
  plot lines: w,Re(c)+10
  plot lines:w,Im(c)

```

```

next w
set area color 3
set point style 4
for w=-1 to 1 step 0.05
  let g=1/(a+i*w)
  plot points:w,Re(g)+10
  plot points:w,Im(g)
next w
function f(x)
  let a=0.1
  let f=exp(-a*x)
end function
END

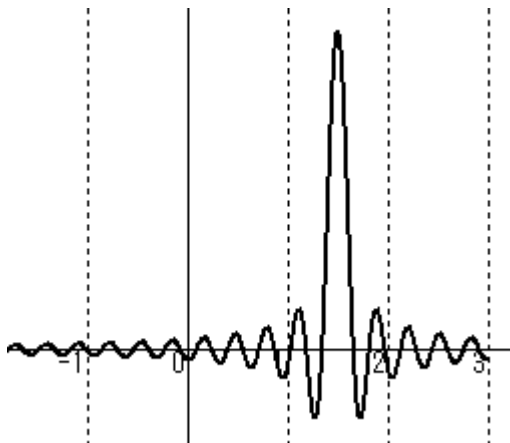
```

6 . $f(t) = e^{i \cdot 1.5t}$ のフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot 1.5 \cdot t} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot (\omega - 1.5) \cdot t} dt$$

$$\therefore F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - 1.5)$$

a=0.1 の場合の数値積分によるグラフィメーヂを描く。(実部のみあらわれる。)



```

!フ変 03.bas Uede 03-12-7
option arithmetic complex
option base 0
set window -5,5,-15,15
set axis color 1
draw grid with scale (1,15)

```

```

let i=complex(0,1)

let dy=0.01
let dw=0.01
set line width 3
for w=-3 to 3 step dw
  let c=0
  for y=-20 to 20 step dy
    let c=c+1/2/pi*f(y)*exp(-i*w*y)*dy
  next y
  set line color 1
  plot lines: w,Re(c)
  set line color 3
  ! plot lines: w,Im(c)
next w
function f(x)
  let f=exp(i*1.5*x)
  !!let f=cos(1*x)
  !!let f=sin(1*x)
end function
END

```

一般に $f(t) = e^{i \cdot a \cdot t}$ $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - a)$
 $f(t) = e^{-i \cdot a \cdot t}$ $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega + a)$

7 . ユニットステップ関数のフーリエ変換のイメージ

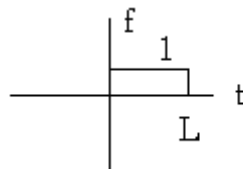
$f(t) = \begin{cases} 1 \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases}$ ステップ関数は $f(t) = \begin{cases} e^{-at} \dots (t \geq 0) \\ 0 \dots (t < 0) \end{cases}$ $a \rightarrow 0$ で近似

$$F(\omega) = \frac{1}{a + i\omega} = \frac{a - i\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - \frac{i\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$a \rightarrow +0$ で $\frac{a}{a^2 + \omega^2} \rightarrow \pi\delta(\omega)$ 、 $-\frac{i\omega}{a^2 + \omega^2} \rightarrow \frac{1}{i\omega}$

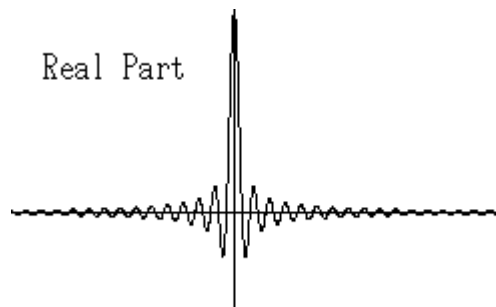
ゆえに、 $F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$

本当のイメージはどうか。 四角関数



を想定して、L を大きくとって、イメージのためのグラフを描かせて見る。

実部はデルタ関数らしい。 虚部は上の式中の $\frac{1}{i\omega}$ がギザギザだ。



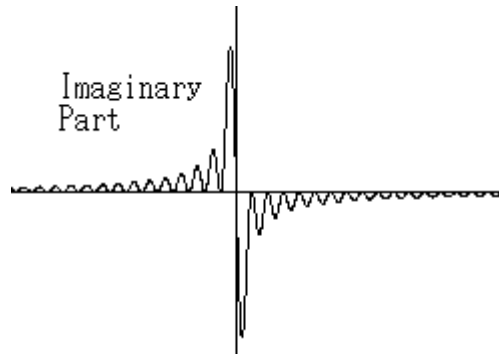
!フーリエ変換
!フ変 08e.bas Uede 05-5-9

```
option arithmetic complex
option base 0
set window -2,2,-1,4
let i=complex(0,1)
```

```
plot lines:-2,2;2,2
plot lines:-2,0;2,0
plot lines:0,-40;0,80
```

```
let dy=0.01
let dw=0.01
let L=100
```

```
for w=-2 to 2 step 0.001
```



```

let g=(exp(-i*w*L)-1)/(-i*w)
plot lines:w,Re(g)/L+2;
next w
plot lines
for w=-2 to 2 step 0.001
let g=(exp(-i*w*L)-1)/(-i*w)
plot lines:w,Im(g)/L;
next w
END

```

四角関数（奇関数）でも $\frac{1}{i\omega}$ のイメージはギザギザだった。