

Textbook p.40 Problem 4

$$\begin{bmatrix} E1 & E2 \\ A1 & A2 \\ L1 & L2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2.06 \cdot 10^{11} & 2.06 \cdot 10^{11} \\ \frac{10}{10^4} & \frac{10}{10^4} \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Pa[N /m2]} \\ \text{m}^2 \\ \text{m} \end{array} \quad P := 10000$$

$$\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{A1 \cdot E1}{L1} \\ \frac{A2 \cdot E2}{L2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.06 \cdot 10^9 \\ 1.03 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{k1}{k1 + k2} \\ \frac{k2}{k1 + k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 \\ 0.333 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \end{bmatrix} \cdot u$$

$P1 + P2 = P$

$$u := \frac{P}{k1 + k2} \quad u = 3.236 \cdot 10^{-6}$$

$$P1 := \frac{k1}{k1 + k2} \cdot P \quad P1 = 6.667 \cdot 10^3 \quad \text{N}$$

$$\sigma1 := \frac{P1}{A1} \quad \sigma1 = 6.667 \cdot 10^6 \quad \text{Pa}$$

$$P2 := \frac{k2}{k1 + k2} \cdot P \quad P2 = 3.333 \cdot 10^3 \quad \text{N}$$

$$\sigma2 := \frac{P2}{A2} \quad \sigma2 = 3.333 \cdot 10^6 \quad \text{Pa}$$

Textbook p.41 Problem 5

$$\begin{bmatrix} A_1 & L_1 \\ A_2 & L_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{8}{10^4} & 4 \\ \frac{12}{10^4} & 3 \end{bmatrix} \quad E := 2.06 \cdot 10^{11}$$

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ -500000 \end{bmatrix} \quad \text{LOAD}$$

$$\begin{bmatrix} cs_1 & sn_1 \\ cs_2 & sn_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} EAL_1 \\ EAL_2 \end{bmatrix} := E \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} \\ \frac{A_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} EAL_1 \\ EAL_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.12 \cdot 10^7 \\ 8.24 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

stiffness

$$K_1 := EAL_1 \cdot \begin{bmatrix} cs_1 \cdot cs_1 & cs_1 \cdot sn_1 \\ sn_1 \cdot cs_1 & sn_1 \cdot sn_1 \end{bmatrix} \quad \frac{K_1}{EAL_1} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 \\ -0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$K_2 := EAL_2 \cdot \begin{bmatrix} cs_2 \cdot cs_2 & cs_2 \cdot sn_2 \\ sn_2 \cdot cs_2 & sn_2 \cdot sn_2 \end{bmatrix} \quad \frac{K_2}{EAL_2} = \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 \\ 0.48 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$KG := K_1 + K_2 \quad \frac{KG}{EAL_2} = \begin{bmatrix} 0.82 & 0.24 \\ 0.24 & 0.68 \end{bmatrix}$$

$$u := KG^{-1} \cdot P \quad u = \begin{bmatrix} 2.913 \cdot 10^{-3} \\ -9.951 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$P1 := K_1 \cdot u$$

$$P2 := K_2 \cdot u$$

$$P1 = \begin{bmatrix} 2.4 \cdot 10^5 \\ -3.2 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$P2 = \begin{bmatrix} -2.4 \cdot 10^5 \\ -1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$|P1| = 4 \cdot 10^5$$

$$|P2| = 3 \cdot 10^5$$

$$\sqrt{2.56^2 + 1.92^2} = 3.2$$

$$\sigma_1 := \frac{-|P1|}{A_1} \quad \frac{\sigma_1}{10^6} = -500 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_2 := \frac{|P2|}{A_2} \quad \frac{\sigma_2}{10^6} = 250 \quad \text{MPa}$$

Textbook p.41 Problem 6

2D-Problem 3

$$E := 2.06 \cdot 10^{11} \quad \text{Pa}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & L_1 \\ A_2 & L_2 \\ A_3 & L_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.0012 & 1.2 \\ 0.0009 & 0.9 \\ 0.0009 & 0.9 \end{bmatrix} \quad i := 1..3 \quad \text{LOAD} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 600000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} cs_1 & sn_1 \\ cs_2 & sn_2 \\ cs_3 & sn_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Element Stiffness Matrix

$$Ke_i := \frac{E \cdot A_i}{L_i} \cdot \begin{bmatrix} cs_i \cdot cs_i & cs_i \cdot sn_i \\ sn_i \cdot cs_i & sn_i \cdot sn_i \end{bmatrix} \quad Ke_1 = \begin{bmatrix} 1.318 \cdot 10^8 & 9.888 \cdot 10^7 \\ 9.888 \cdot 10^7 & 7.416 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

$$Ke_2 = \begin{bmatrix} 7.416 \cdot 10^7 & 9.888 \cdot 10^7 \\ 9.888 \cdot 10^7 & 1.318 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

$$Ke_3 = \begin{bmatrix} 7.416 \cdot 10^7 & -9.888 \cdot 10^7 \\ -9.888 \cdot 10^7 & 1.318 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

Global Stiffness Matrix

$$KG := \sum_{i=1}^3 Ke_i \quad KG = \begin{bmatrix} 2.802 \cdot 10^8 & 9.888 \cdot 10^7 \\ 9.888 \cdot 10^7 & 3.378 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

$$KG^{-1} = \begin{bmatrix} 3.981 \cdot 10^{-9} & -1.165 \cdot 10^{-9} \\ -1.165 \cdot 10^{-9} & 3.301 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix} \quad u := KG^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 2.388 \cdot 10^{-3} \\ -6.99 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

x-y Components of the loads of the elements

$$F1 := Ke_1 \cdot u$$

$$F2 := Ke_2 \cdot u$$

$$F3 := Ke_3 \cdot u$$

$$F1 = \begin{bmatrix} 2.458 \cdot 10^5 \\ 1.843 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad F2 = \begin{bmatrix} 1.08 \cdot 10^5 \\ 1.44 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad F3 = \begin{bmatrix} 2.462 \cdot 10^5 \\ -3.283 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Axial Loads of the elements and stresses.

$$F1a := [cs_1 \quad sn_1] \cdot F1$$

$$F2a := [cs_2 \quad sn_2] \cdot F2$$

$$F3a := [cs_3 \quad sn_3] \cdot F3$$

$$F1a = 3.072 \cdot 10^5 \quad \text{N}$$

$$\sigma_1 := \frac{F1a}{A_1}$$

$$\sigma_1 = 2.56 \cdot 10^8$$

$$F2a = 1.8 \cdot 10^5 \quad \text{N}$$

$$\sigma_2 := \frac{F2a}{A_2}$$

$$\sigma_2 = 2 \cdot 10^8 \quad \text{Pa}$$

$$F3a = -4.104 \cdot 10^5 \quad \text{N}$$

$$\sigma_3 := \frac{F3a}{A_3}$$

$$\sigma_3 = -4.56 \cdot 10^8$$

$$P = (k_1 + k_2) \cdot u$$

$$P_1 + P_2 = P$$

$$u = \frac{P}{k_1 + k_2}$$

$$P_1 = \frac{A_1 \cdot E_1}{L_1} \cdot u = k_1 \cdot u$$

$$P_2 = \frac{A_2 \cdot E_2}{L_2} \cdot u = k_2 \cdot u$$

Textbook p.41 Problem 5

other solutions

$$\begin{bmatrix} A_1 & L_1 \\ A_2 & L_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{8}{10^4} & 4 \\ \frac{12}{10^4} & 3 \end{bmatrix}$$

$$E := 2.06 \cdot 10^{11}$$

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ -500000 \end{bmatrix}$$

LOAD

$$\begin{bmatrix} cs_1 & sn_1 \\ cs_2 & sn_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} EAL_1 \\ EAL_2 \end{bmatrix} := E \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} \\ \frac{A_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} EAL_1 \\ EAL_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.12 \cdot 10^7 \\ 8.24 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

stiffness

$$K_1 := EAL_1 \cdot \begin{bmatrix} cs_1 \cdot cs_1 & cs_1 \cdot sn_1 \\ sn_1 \cdot cs_1 & sn_1 \cdot sn_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{K_1}{EAL_1} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 \\ -0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$K_2 := EAL_2 \cdot \begin{bmatrix} cs_2 \cdot cs_2 & cs_2 \cdot sn_2 \\ sn_2 \cdot cs_2 & sn_2 \cdot sn_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{K_2}{EAL_1} = \begin{bmatrix} 1.28 & 0.96 \\ 0.96 & 0.72 \end{bmatrix}$$

$$KG := K_1 + K_2$$

$$\frac{KG}{EAL_1} = \begin{bmatrix} 1.64 & 0.48 \\ 0.48 & 1.36 \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ -500000 \end{bmatrix}$$

$$ux := \frac{1}{EAL_1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0.48 \\ -500000 & 1.36 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.64 & 0.48 \\ 0.48 & 1.36 \end{vmatrix}}$$

$$ux = 2.913 \cdot 10^{-3}$$

$$uy := \frac{1}{EAL_1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1.64 & 0 \\ 0.48 & -500000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.64 & 0.48 \\ 0.48 & 1.36 \end{vmatrix}}$$

$$uy = -9.951 \cdot 10^{-3}$$

$$u := \begin{bmatrix} ux \\ uy \end{bmatrix}$$

$$P1 := K_1 \cdot u$$

$$P2 := K_2 \cdot u$$

$$P1 = \begin{bmatrix} 2.4 \cdot 10^5 \\ -3.2 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$P2 = \begin{bmatrix} -2.4 \cdot 10^5 \\ -1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Textbook p.41 Problem 6

other solutions

2D-Problem 3

$$E := 2.06 \cdot 10^{11} \quad \text{Pa}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & L_1 \\ A_2 & L_2 \\ A_3 & L_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.0012 & 1.2 \\ 0.0009 & 0.9 \\ 0.0009 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{LOAD} \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 600000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i := 1..3 \quad \begin{bmatrix} cs_1 & sn_1 \\ cs_2 & sn_2 \\ cs_3 & sn_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Element Stiffness Matrix

$$EAL_i := \frac{E \cdot A_i}{L_i} \quad EAL = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.06 \cdot 10^8 \\ 2.06 \cdot 10^8 \\ 2.06 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \quad Ke_i := EAL_i \cdot \begin{bmatrix} cs_i \cdot cs_i & cs_i \cdot sn_i \\ sn_i \cdot cs_i & sn_i \cdot sn_i \end{bmatrix} \quad \frac{Ke_1}{EAL_1} = \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 \\ 0.48 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Ke_2}{EAL_1} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 \\ 0.48 & 0.64 \end{bmatrix} \quad \frac{Ke_3}{EAL_1} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 \\ -0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$KG := \sum_{i=1}^3 Ke_i \quad \frac{KG}{EAL_1} = \begin{bmatrix} 1.36 & 0.48 \\ 0.48 & 1.64 \end{bmatrix}$$

Global Stiffness Matrix

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 600000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ux := \frac{1}{EAL_1} \cdot \frac{\begin{bmatrix} 600000 & 0.48 \\ 0 & 1.64 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1.36 & 0.48 \\ 0.48 & 1.64 \end{bmatrix}} \quad ux = 2.388 \cdot 10^{-3}$$

$$uy := \frac{1}{EAL_1} \cdot \frac{\begin{bmatrix} 1.36 & 600000 \\ 0.48 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1.36 & 0.48 \\ 0.48 & 1.64 \end{bmatrix}} \quad uy = -6.99 \cdot 10^{-4}$$

$$u := \begin{bmatrix} ux \\ uy \end{bmatrix}$$

x-y Components of the loads of the elements

$$F1 := Ke_1 \cdot u$$

$$F2 := Ke_2 \cdot u$$

$$F3 := Ke_3 \cdot u$$

$$F1 = \begin{bmatrix} 2.458 \cdot 10^5 \\ 1.843 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$F2 = \begin{bmatrix} 1.08 \cdot 10^5 \\ 1.44 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$F3 = \begin{bmatrix} 2.462 \cdot 10^5 \\ -3.283 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

