

問題 1

問題を解く前に明記すべき事項

(1) ペルトン水車の最適周速度

ペルトン水車に発生する動力は

$$P = \rho Q U (v_2 - U)(1 - \cos \theta) \quad [\text{W}]$$

これは周速 U の 2 次関数で、

$$U = \frac{v_2}{2}$$

のとき最大となる。すなわち、周速がノズルジェット速度の半分のとき動力は最大となる。

(2) ペルトン水車のためのペンストックの摩擦抵抗

パイプ中の摩擦抵抗のヘッド h_f は次の式であたえられる。

$$h_f = f \frac{L v^2}{D 2g}$$

f : 摩擦係数 L : パイプ長さ D : パイプ内径 v : パイプ内流速
ジェットの理論的発生動力は

$$P_2 = \rho Q g (H - h_f) = \rho g A_2 v_2 \left(H - f \frac{L v^2}{D 2g} \right)$$

連続の式 $A_2 v_2 = A v$ により

$$P_2 = \rho g A_2 v_2 \left(H - f \frac{L v_2^2}{D 2g} \frac{A_2^2}{A^2} \right)$$

A : パイプ内断面積 A_2 : ジェット断面積
ジェットの最大動力は

$$\frac{dP_2}{dA_2} = \rho g v_2 \left(H - f \frac{L v_2^2}{D 2g} \frac{3A_2^2}{A^2} \right) = 0$$

のときであるから、

$$H = f \frac{L v^2}{D 2g A^2} \frac{A^2}{A_2^2} 3A_2^2 = 3h_f$$

したがって、 $h_f = \frac{H}{3}$ のとき動力は最大となる。

さて、問題に取りかかろう。

まずノズルにおける流速をもとめよう。ベルヌーイの式に損失 h_f を入れて

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2 - h_f)$$

$v_1 = 0$ m/s、 $p_1 - p_2 = 0$ Pa、 $z_1 - z_2 = 500$ m、 $h_f = 500/3$ m を代入すると

$$\frac{v_2^2}{2} = 3267 \quad \text{ゆえに} \quad v_2 = 80.83 \text{ m/s}$$

$$\text{ここで } U = \frac{v_2}{2} = 40.42 \text{ m/s}$$

(1) ノズル穴直径は 8 cm だから流量 Q は

$$Q = \frac{\pi}{4} 0.08^2 \cdot 80.83 = 0.409 \text{ m}^3/\text{s}$$

また、ジェットの偏向角度は 150° だから、ブレードにかかる接線力は

$$F = \rho Q (v_2 - U)(1 - \cos \theta) = 1000 \cdot 0.409 \cdot (80.83 - 40.42)(1 - \cos 150^\circ) = 30640 \text{ N}$$

(2) ペルトン水車に発生する動力は

$$P = \rho Q U (v_2 - U)(1 - \cos \theta) = 30640 \cdot 40.42 = 1.238 \cdot 10^6 \text{ W}$$

問題 2

$$Q = \frac{\pi}{4} 0.05^2 \cdot 60 = 0.118 \text{ m}^3/\text{s} \quad \theta = 150^\circ \quad U = \frac{2\pi \cdot 250}{60} R = 23.56 \text{ m/s}$$

接線力は

$$F = \rho Q (v_2 - U)(1 - \cos \theta) = 1000 \cdot 0.118 \cdot (60 - 23.56)(1 - \cos 150^\circ) = 8010 \text{ N}$$

ペルトン水車に発生する動力は

$$P = \rho Q U (v_2 - U)(1 - \cos \theta) = 8010 \cdot 23.56 = 1.887 \cdot 10^5 \text{ W}$$

問題 3

ペルトン水車に発生する動力は $P = \rho Q U (v_2 - U)(1 - \cos \theta)$ で P は $U = \frac{v_2}{2}$ のとき

に最大になる。したがって $U = \frac{16}{2} = 8$ m/s。また $Q = \frac{\pi}{4} 0.05^2 \cdot 16 = 0.031$ m³/s

接線力は $F = \rho Q (v_2 - U)(1 - \cos \theta) = 1000 \cdot 0.031 \cdot (16 - 8)(1 - \cos 120^\circ) = 377$ N

ペルトン水車に発生する動力は

$$P = \rho Q U (v_2 - U)(1 - \cos \theta) = 377 \cdot 8 = 3016 \text{ W}$$

$U = 8 \text{ m/s}$ のときに動力は最大になるから、 180 rpm でこの周速となるための直径は $D = 2 \frac{U}{\omega} = 2 \frac{U}{2\pi n} = 0.849 \text{ m}$

問題 4

問題を解く前に明記すべき事項

(1) ペルトン水車の最適ジェット速度

$$v_2 = \sqrt{2g(H - h_f)} = \sqrt{2g\left(H - \frac{H}{3}\right)} = \sqrt{\frac{4gH}{3}}$$

(2) ペルトン水車の最適ノズル直径

$$\frac{v_2^2}{2g} = H - h_f = 3h_f - h_f = 2h_f = 2f \frac{L}{D} \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{D_2}{D}\right)^4$$

まとめると

$$D_2 = \left(\frac{D^5}{2fL}\right)^{\frac{1}{4}}$$

さて、問題に取りかかろう。

まず、損失ヘッドに $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$ 、 $H = 250 \text{ m}$ 、 $L = 500 \text{ m}$ 、 $f = 0.03$ を代入して

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{0.25\pi D^2}\right)^2 = \frac{H}{3} \quad \text{ゆえに} \quad D = 0.669 \text{ m}$$

また、ノズル直径 $D_2 \text{ m}$ は

$$f := 0.03 \quad L := 500 \quad D_2 := \left(\frac{D^5}{2 \cdot f \cdot L}\right)^{0.25} \quad D_2 = 0.259 \text{ m}$$

問題 5

$$g := 9.8 \quad \rho := 1000 \quad \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad hf := 4 \quad Q := 10$$

$$P := \rho \cdot Q \cdot g \cdot (z1 - z2 - hf) \quad P = 2.058 \cdot 10^6 \quad W$$

問題 6

(1) 吸出管は追加ヘッドをつけるので、その分ポテンシャル動力が大きくなる。

(2) 最終水流速度 v_2 を小さくするので、運動エネルギーをフルに動力につかうことができる。

問題 7

$$g := 9.8 \quad \rho := 1000 \quad \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} \quad hf := 20 \quad Q := 30 \\ v2 := 2$$

エネルギーバランスの式を用いた場合

$$W_{out} := \rho \cdot Q \cdot g \cdot (z1 - z2 - hf) - \rho \cdot Q \cdot \frac{v2^2}{2} \quad W_{out} = 2.346 \cdot 10^7 \quad W$$

通常近似式を用いた場合

$$P := \rho \cdot Q \cdot g \cdot (z1 - z2 - hf) \quad P = 2.352 \cdot 10^7 \quad W$$

通常は近似式で計算する。