

問題 1

重力加速度は

$$g := 9.8 \quad \text{c [m/s}^2\text{]}$$

ガソリンの比重と液体の比重は

$$s_{\text{gas}} := 0.68 \quad s_{\text{liq}} := 1.6$$

液体の高さを x とすると、底における左と右の圧力は等しいから、

$$\rho \cdot g \cdot 1.5 + s_{\text{liq}} \cdot \rho \cdot g \cdot 1 = s_{\text{gas}} \cdot \rho \cdot g \cdot (2.5 - x) + s_{\text{liq}} \cdot \rho \cdot g \cdot x$$

x について解くと

$$\text{液体の高さは } x = 1.522 \quad [\text{m}]$$

問題 2

水銀の比重は

$$s := 13.6$$

U字管の内径は $d = 0.01$ [m] だから、右側へ入れた 20 cm^3 の水柱の高さ H [m]は

$$H := \frac{20}{100^3} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} \quad H = 0.255 \quad [\text{m}]$$

水柱の高さ H [m]を、水銀柱の高さ h [m]になおすと、

$$h := \frac{\rho \cdot g \cdot H}{s \cdot \rho \cdot g} \quad h = 0.019 \quad [\text{m}]$$

水のかわりに、水銀柱 $h = 0.019$ [m] が右側へ入れられた水銀と考えると、左右の水銀は本の 0.1 [m] から $h/2 = 0.0095$ [m] だけレベルが高くなってつりあう。したがって、左の水銀の高さは

$$H_{\text{left}} := 0.1 + \frac{h}{2} \quad H_{\text{left}} = 0.109 \quad [\text{m}]$$

右に入れ h の水銀の代わりに水の高さのもどして考えると、右の高さは

$$H_{\text{right}} := 0.1 - \frac{h}{2} + H \quad H_{\text{right}} = 0.345 \quad [\text{m}]$$

問題 3

ガソリンの比重は

$$s := 0.68$$

タンクの深さは 0.3 [m] で、水の深さが 0.02 [m] とし、タンクの上の隙間を x [m] とする。 底の圧力計はガソリン 0.3 [m] の圧力を示しているので次の等式がなりたつ。

$$\rho \cdot g \cdot 0.02 + s \cdot \rho \cdot g \cdot (0.28 - x) = s \cdot \rho \cdot g \cdot 0.3$$

x について解くと

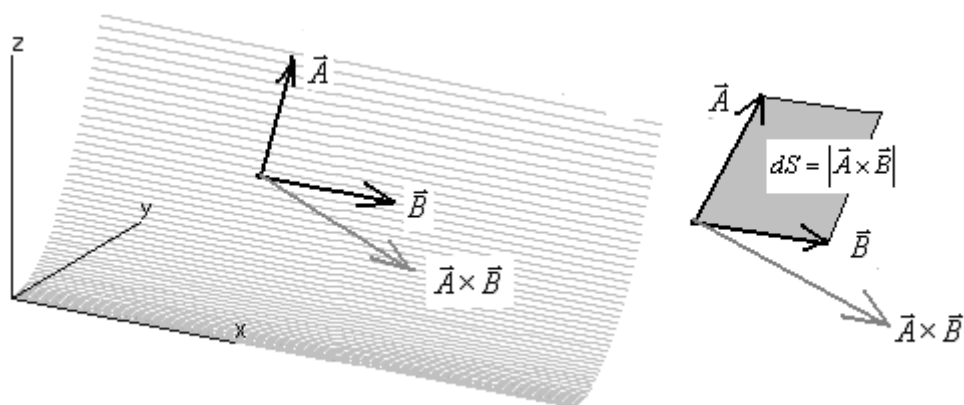
$$\text{タンクの上の隙間は } x = 0.0094 \text{ [m]} = 9 \text{ [mm]}$$

問題 4

自由表面 $z=16$ では圧力(ゲージ圧力)が 0 で、 $z=0$ における圧力は

$\rho g H = 1000 \cdot 9.8 \cdot 16 = 1.568 \cdot 10^5$ [Pa]だから、 z における圧力は

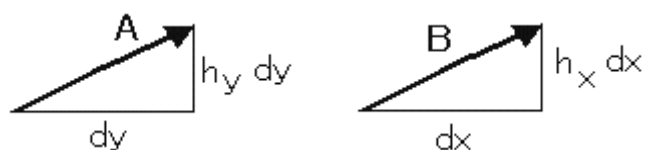
$$p = 1.568 \cdot 10^5 - 9.8 \times 10^3 z = 1.568 \cdot 10^5 - 9.8 \times 10^3 y^2 \text{ [Pa]}$$



$x-y$ 面で面積分を行うこととしよう。 関数を次のように定義する。

$$h = y^2$$

\vec{A} を $y-z$ 面に平行なダム表面のベクトル、 \vec{B} を $z-x$ 面に平行なダム表面のベクトルとすると、これらは次のようにあらわされる。



$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \cdot dy \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot dx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx$$

\vec{C} を \vec{A} と \vec{B} の外積とし、 \vec{n} をその法線単位ベクトルとすると、

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}$$

$$ds = |\vec{C}|$$

圧力 p は法線単位ベクトル \vec{n} の方向に作用するから

$$\vec{F} = \int_0^4 \int_0^{24} p \cdot \vec{n} \cdot |\vec{C}| = \int_0^4 \int_0^{24} p \cdot \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \cdot |\vec{C}| = \int_0^4 \int_0^{24} p \cdot \vec{C}$$

$$= \int_0^4 \int_0^{24} (156800 - 9800y^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} \cdot dx dy \quad (\text{N})$$

したがって、

$$F_x = 0$$

$$F_y = \int_0^4 \int_0^{24} (156800 - 9800y^2) \cdot (2y) dx dy = 3.011 \cdot 10^7 \quad (\text{N})$$

$$F_z = \int_0^4 \int_0^{24} (156800 - 9800y^2) \cdot (-1) dx dy = -1.004 \cdot 10^7 \quad (\text{N})$$

問題 5

(1) ヒントのみ

$$9.8 \cdot 10^3 \cdot 25 = 2.45 \cdot 10^5 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ fx \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ fy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -fx \\ -fy \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{\frac{25}{3}} \int_0^{25} (9800 \cdot 3 \cdot y - 245000) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} dx dy \quad F_x = 0 \quad \text{N}$$

$$F_y \int_0^{\frac{25}{3}} \int_0^{25} (9800 \cdot 3 \cdot y - 245000) \cdot (-3) dx dy = 7.656 \cdot 10^7 \quad \text{N}$$

$$F_z \int_0^{\frac{25}{3}} \int_0^{25} (9800 \cdot 3 \cdot y - 245000) \cdot (1) dx dy = -2.552 \cdot 10^7 \quad \text{N}$$

(2)

自由表面 $z=100$ では圧力(ゲージ圧力)が 0 で、 $z=0$ における圧力は

$\rho g H = 1000 \cdot 9.8 \cdot 100 = 9.8 \cdot 10^5$ [Pa]だから、 z における圧力は

$$p = 9.8 \cdot 10^5 - 9.8 \times 10^3 z \quad [\text{Pa}]$$

$z-x$ 面で面積分を行うこととしよう。関数を次のように定義する。

$$h = 100z - zx^2$$

\vec{A} を y - z 面に平行なダム表面のベクトル、 \vec{B} を x - y 面に平行なダム表面のベクトルとすると、これらは次のようにあらわされる。

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_z \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 - x^2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dz \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ h_x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx = \begin{pmatrix} 1 \\ -2zx \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx$$

\vec{C} を \vec{A} と \vec{B} の外積とし、 \vec{n} をその法線単位ベクトルとすると、

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}$$

$$ds = |\vec{C}|$$

圧力 p は法線単位ベクトル \vec{n} の方向に作用するから

$$\vec{F} = \int_{-10}^{10} \int_0^{100} p \cdot \vec{n} \cdot |\vec{C}| = \int_{-10}^{10} \int_0^{100} p \cdot \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \cdot |\vec{C}| = \int_{-10}^{10} \int_0^{100} p \cdot \vec{C}$$

$$= \int_{-10}^{10} \int_0^{100} (980000 - 9800z) \cdot \begin{pmatrix} 2zx \\ 1 \\ x^2 - 100 \end{pmatrix} \cdot dz dx \quad (\text{N})$$

したがって、

$$F_x = \int_{-10}^{10} \int_0^{100} (980000 - 9800z) \cdot (2 \cdot z \cdot x) dz dx = 0 \quad (\text{N})$$

$$F_y = \int_{-10}^{10} \int_0^{100} (980000 - 9800z) \cdot (1) dz dx = 9.8 \cdot 10^8 \quad (\text{N})$$

$$F_z = \int_{-10}^{10} \int_0^{100} (980000 - 9800z) \cdot (x^2 - 100) dz dx = -6.533 \cdot 10^{10} \quad (\text{N})$$